

1. Determinare il punto della sfera di equazione

$$x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 6y - 8z + 28 = 0$$

più vicino al piano di equazione

$$x + y + z = 2$$

Svolgimento :

Utilizziamo il metodo dei moltiplicatori di Lagrange tramite la $F(x, y, z, \lambda) = f(x, y, z) + \lambda \psi(x, y, z)$, dove $f(x, y, z)$ esprime la funzione da minimizzare ed è rappresentata dalla distanza al quadrato di un generico punto $P(x, y, z)$ della sfera dal piano assegnato, e $\psi(x, y, z)$ la funzione vincolo rappresentata dalla sfera stessa.

Un punto generico $P(x, y, z)$ della sfera, dista dal piano assegnato : $\delta = \frac{|x + y + z - 2|}{\sqrt{3}}$

Si ha così che la distanza al quadrato diventa : $\delta^2 = \frac{(x + y + z - 2)^2}{3}$

Risolvendo ora il sistema :

$$\begin{cases} F_x(x, y, z, \lambda) = f_x(x, y, z) + \lambda \psi_x(x, y, z) \\ F_y(x, y, z, \lambda) = f_y(x, y, z) + \lambda \psi_y(x, y, z) \\ F_z(x, y, z, \lambda) = f_z(x, y, z) + \lambda \psi_z(x, y, z) \\ \psi(x, y, z) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{2}{3}(x + y + z - 2) + \lambda(2x - 4) = 0 \\ \frac{2}{3}(x + y + z - 2) + \lambda(2y - 6) = 0 \\ \frac{2}{3}(x + y + z - 2) + \lambda(2z - 8) = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 6y - 8z + 28 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{2}{3}(x + y + z - 2) = \lambda(4 - 2x) \\ \lambda(4 - 2x) + \lambda(2y - 6) = 0 \\ \lambda(4 - 2x) + \lambda(2z - 8) = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 6y - 8z + 28 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{2}{3}(x + y + z - 2) = \lambda(4 - 2x) \\ \lambda(2y - 2x - 2) = 0 \\ \lambda(2z - 2x - 4) = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 6y - 8z + 28 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{2}{3}(x+y+z-2) = \lambda(4-2x) \\ y = x+1 \\ z = x+2 \\ x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 6y - 8z + 28 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{2}{3}(x+y+z-2) = \lambda(4-2x) \\ y = x+1 \\ z = x+2 \\ x^2 + (x+1)^2 + (x+2)^2 - 4x - 6(x+1) - 8(x+2) + 28 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{2}{3}(x+y+z-2) = \lambda(4-2x) \\ y = x+1 \\ z = x+2 \\ 3x^2 - 12x + 11 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = x+1 \\ z = x+2 \\ x_1 = 2 - \frac{\sqrt{3}}{3} \end{cases}, \begin{cases} y = x+1 \\ z = x+2 \\ x_1 = 2 + \frac{\sqrt{3}}{3} \end{cases}$$

e quindi i due punti : $P_1 \left(2 - \frac{\sqrt{3}}{3}, 3 - \frac{\sqrt{3}}{3}, 4 - \frac{\sqrt{3}}{3} \right)$, $P_2 \left(2 + \frac{\sqrt{3}}{3}, 3 + \frac{\sqrt{3}}{3}, 4 + \frac{\sqrt{3}}{3} \right)$

sostituendo il punto P_1 nella relazione iniziale $\delta = \frac{|x+y+z-2|}{\sqrt{3}}$ abbiamo la distanza minima :

$$\delta_{\min} = \frac{\left| 2 - \frac{\sqrt{3}}{3} + 3 - \frac{\sqrt{3}}{3} + 4 - \frac{\sqrt{3}}{3} - 2 \right|}{\sqrt{3}} = \frac{7 - \sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{7\sqrt{3}}{3} - 1$$

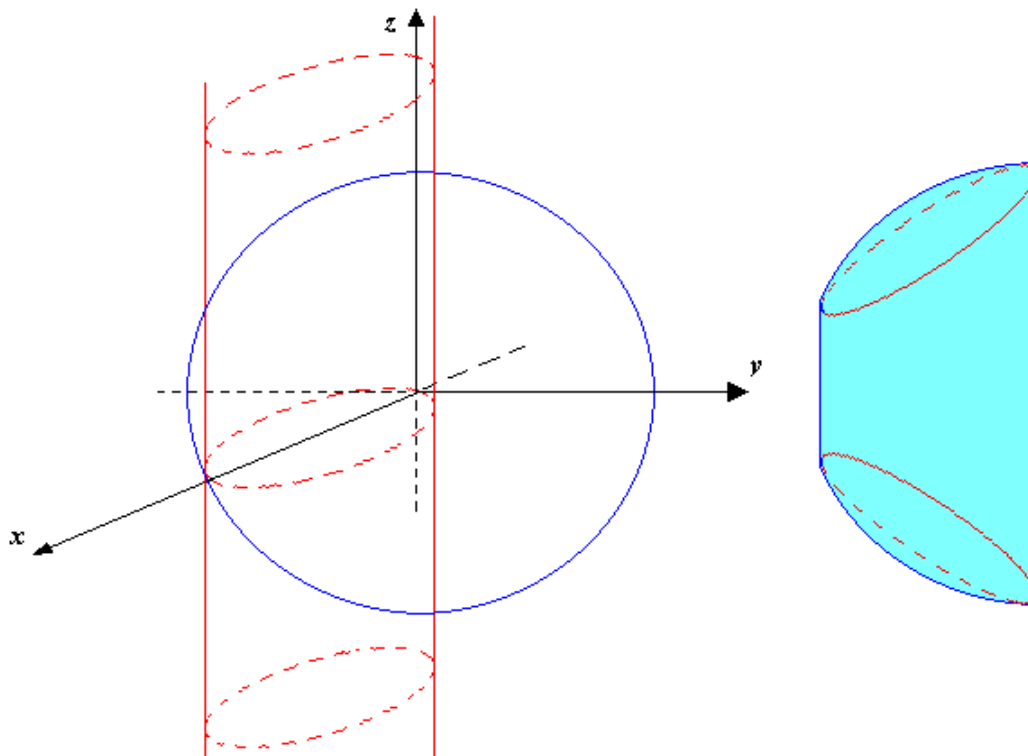
in effetti sostituendo P_2 si ha :

$$\delta = \frac{\left| 2 + \frac{\sqrt{3}}{3} + 3 + \frac{\sqrt{3}}{3} + 4 + \frac{\sqrt{3}}{3} - 2 \right|}{\sqrt{3}} = \frac{7 + \sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{7\sqrt{3}}{3} + 1$$

2. Calcolare il volume della porzione di cilindro di equazione $x^2 + y^2 - 4x = 0$ interna alla sfera di equazione $x^2 + y^2 + z^2 = 16$

Svolgimento :

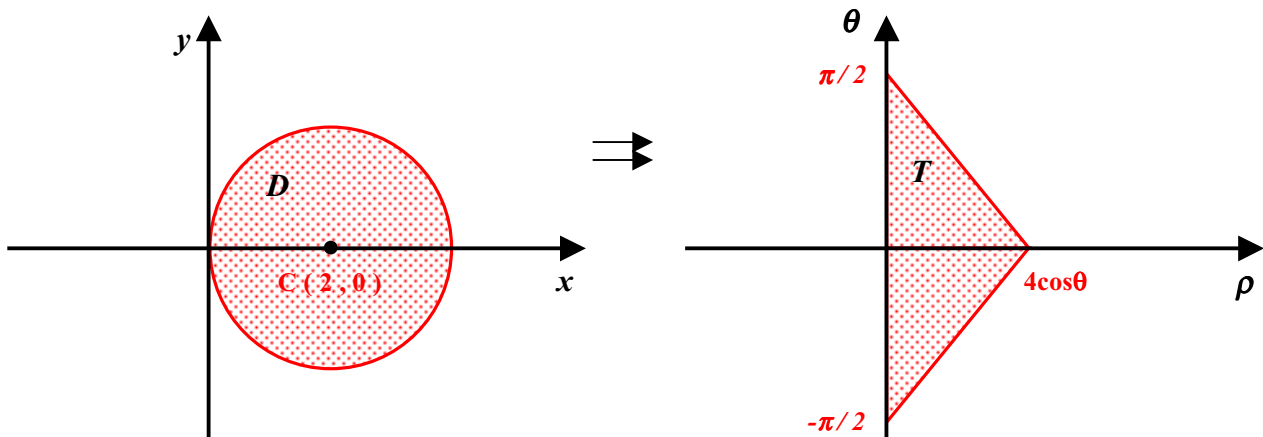
Poichè le funzioni , espressioni del cilindro e della sfera , sono funzioni simmetriche rispetto all'asse x , il solido in questione gode a sua volta di simmetria rispetto allo stesso asse .



Ricordando la formula del volume di un solido limitato da due funzioni :

$$V = \iint_D f_2(x, y) - f_1(x, y) dx dy$$

con $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 - 4x \leq 0\}$



Con trasformazione in coordinate polari : $\begin{cases} x = \rho \cos \vartheta \\ y = \rho \sin \vartheta \end{cases} \quad 0 \leq \rho \leq 4 \cos \vartheta \quad ; \quad -\frac{\pi}{2} \leq \vartheta \leq \frac{\pi}{2}$

$$V = 2 \iint_D \sqrt{16 - x^2 - y^2} dx dy = 2 \iint_T \sqrt{16 - \rho^2} J(\rho, \vartheta) d\rho d\vartheta$$

e ricordando che $J(\rho, \vartheta) = \rho$, considerando il dominio normale a θ , si ha che :

$$V = 2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\vartheta \int_0^{4 \cos \vartheta} \rho \sqrt{16 - \rho^2} d\rho = 2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\vartheta \left(-\frac{1}{2} \int_0^{4 \cos \vartheta} -2\rho(16 - \rho^2)^{\frac{1}{2}} d\rho \right) = 2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\vartheta \left[-\frac{1}{3} \sqrt{(16 - \rho^2)^3} \right]_0^{4 \cos \vartheta}$$

$$V = 2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\vartheta \left[-\frac{1}{3} \sqrt{(16 - 16 \cos^2 \vartheta)^3} + \frac{1}{3} \sqrt{16^3} \right] = -\frac{128}{3} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\vartheta \left[\sqrt{(1 - \cos^2 \vartheta)^3} - 1 \right]$$

$$= +\frac{128}{3} [\vartheta]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} - \frac{128}{3} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{(1 - \cos^2 \vartheta)^3} d\vartheta = \frac{128}{3} \pi - \frac{128}{3} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \text{sen}^3 \vartheta d\vartheta$$

$$\frac{128}{3} \pi - \frac{128}{3} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \text{sen} \vartheta (1 - \cos^2 \vartheta) d\vartheta = \frac{128}{3} \pi - \frac{128}{3} \left[-\cos \vartheta + \frac{\cos^3 \vartheta}{3} \right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = +\frac{128}{3} \pi$$

3. Determinare una funzione potenziale della forma differenziale in \mathbb{R}^2

$$\sin(y^2)dx + 2xy \cos(y^2)dy$$

Svolgimento :

Verifichiamo innanzitutto che la forma differenziale del tipo $\omega = A(x, y)dx + B(x, y)dy$ ammetta una funzione potenziale ; la forma differenziale deve essere **esatta** , o meglio deve essere che :

$$\frac{\partial A(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial B(x, y)}{\partial x}$$

Si ha infatti che : $2y \cos(y^2) = 2y \cos(y^2)$

La forma differenziale ammette quindi una funzione potenziale del tipo

$$U(x, y) = \tilde{A}(x, y)dx + \tilde{B}(x, y)dy$$

$$\text{con } \frac{\partial U(x, y)}{\partial x} = \sin(y^2)$$

integrando indefinitamente si ha :

$$U(x, y) = \int \sin(y^2)dx + c(y) \quad \Rightarrow \quad U(x, y) = x \sin(y^2) + c(y)$$

e poichè deve essere che :

$$\frac{\partial U(x, y)}{\partial y} = 2xy \cos(y^2) + c'(y) \quad \text{e poichè} \quad \frac{\partial U(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial \tilde{B}(x, y)}{\partial y}$$

$$2xy \cos(y^2) + c'(y) = 2xy \cos(y^2) \quad \Rightarrow \quad c'(y) = 0 \quad \Rightarrow \quad c(y) = k$$

e di qui : $U(x, y) = x \sin(y^2) + k$ che esprime una **funzione potenziale** della forma iniziale .

Allo stesso modo si poteva procedere :

$$\text{con } \frac{\partial U(x, y)}{\partial y} = 2xy \cos(y^2)$$

integrando indefinitamente rispetto a y si ha :

$$U(x, y) = \int 2xy \cos(y^2) dy + c(x) \quad \Rightarrow \quad U(x, y) = x \sin(y^2) + c(x)$$

e poichè deve essere che :

$$\frac{\partial U(x, y)}{\partial x} = \sin(y^2) + c'(x) \quad \text{e poichè} \quad \frac{\partial U(x, y)}{\partial x} = \frac{\partial \tilde{A}(x, y)}{\partial x}$$

$$\sin(y^2) + c'(x) = \sin(y^2) \quad \Rightarrow \quad c'(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad c(x) = k$$

e di qui : $U(x, y) = x \sin(y^2) + k$ che esprime una **funzione potenziale** della forma iniziale .

4. Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' - 2y' + y = x^2 e^x \\ y(0) = 2, \quad y'(0) = 0 \end{cases}$$

Svolgimento :

Risolvendo l'equazione caratteristica associata :

$$\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 1 \\ \lambda_2 = 1 \end{cases}$$

da cui l'integrale generale del tipo : $y(x) = c_1 e^x + c_2 x e^x + \varphi(x)$

Per la determinazione di $\varphi(x)$ si ha : $\varphi(x) = ax^4 e^x$

$$\varphi'(x) = 4ax^3 e^x + ax^4 e^x$$

$$\varphi''(x) = 12ax^2 e^x + 4ax^3 e^x + 4ax^3 e^x + ax^4 e^x$$

sostituendo nell'equazione di partenza :

$$ax^4 e^x + 8ax^3 e^x + 12ax^2 e^x - 8ax^3 e^x - 2ax^4 e^x + ax^4 e^x = x^2 e^2$$

$$\text{si ha : } 12a = 1 \Rightarrow a = \frac{1}{12}$$

ritornando quindi all'integrale generale : $y(x) = c_1 e^x + c_2 x e^x + \frac{x^4 e^x}{12}$

Per Cauchy :

$$\begin{cases} y'' - 2y' + y = x^2 e^x \\ y(0) = 2 \\ y'(0) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y(x) = c_1 e^x + c_2 x e^x + \frac{x^4 e^x}{12} \\ y'(x) = c_1 e^x + c_2 e^x + c_2 x e^x + \frac{x^3 e^x}{3} + \frac{x^4 e^x}{12} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2 = c_1 \\ 0 = 2 + c_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 = 2 \\ c_2 = -2 \end{cases}$$

e infine l'integrale particolare : $y(x) = 2e^x - 2xe^x + \frac{x^4 e^x}{12}$.

N.B. Se volessimo eseguire una verifica sulla bontà del risultato conseguito si avrebbe :

$$\begin{aligned} y(x) &= 2e^x - 2xe^x + \frac{x^4 e^x}{12} \\ y'(x) &= -2xe^x + \frac{x^3 e^x}{3} + \frac{x^4 e^x}{12} \\ y''(x) &= -2e^x - 2xe^x + x^2 e^x + \frac{x^3 e^x}{3} + \frac{x^3 e^x}{3} + \frac{x^4 e^x}{12} \end{aligned}$$

da cui sostituendo nell'equazione di partenza :

$$-2e^x - 2xe^x + x^2 e^x + \frac{2x^3 e^x}{3} + \frac{x^4 e^x}{12} - 2 \left(-2xe^x + \frac{x^3 e^x}{3} + \frac{x^4 e^x}{12} \right) + 2e^x - 2xe^x + \frac{x^4 e^x}{12} = x^2 e^x$$

$$-2e^x - 2xe^x + x^2 e^x + \frac{2x^3 e^x}{3} + \frac{x^4 e^x}{12} + 4xe^x - \frac{2x^3 e^x}{3} - \frac{x^4 e^x}{6} + 2e^x - 2xe^x + \frac{x^4 e^x}{12} = x^2 e^x$$

$$x^2 e^x = x^2 e^x$$

che verifica l'equazione!