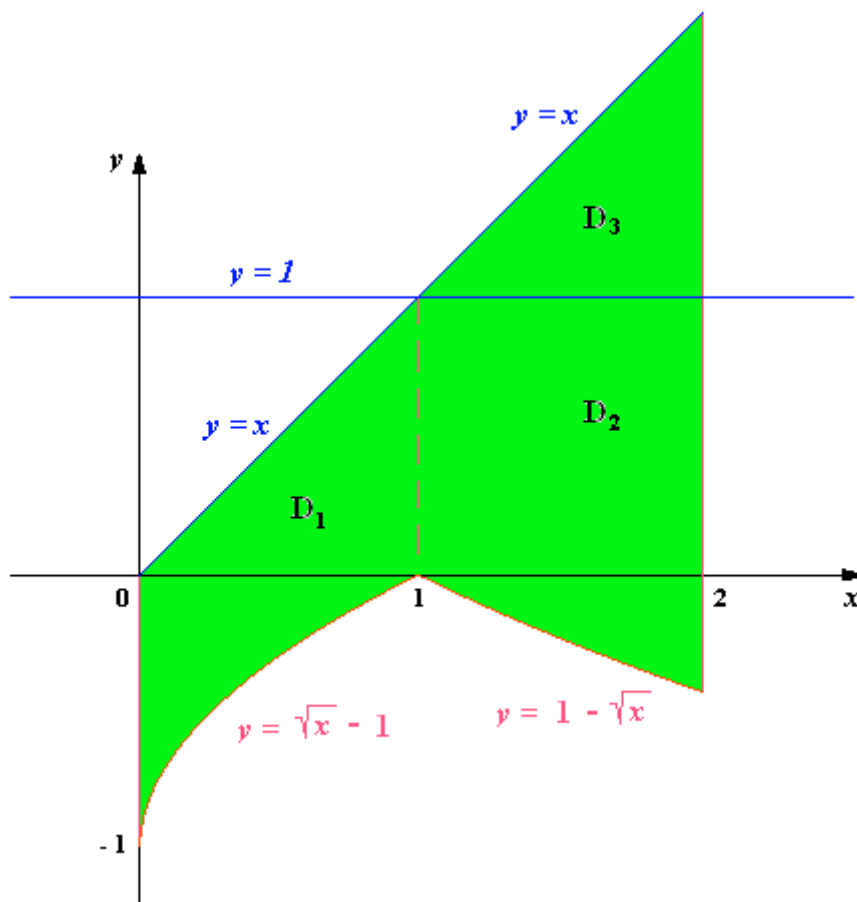


Calcolare l'integrale doppio

$$\iint_D \frac{x^2 y^2 - x^2}{|y^2 - 1|} dx dy$$

con $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 2, -|1 - \sqrt{x}| \leq y \leq x\}$



Considerando il dominio normale a x si ha :

$$\iint_D \frac{x^2 y^2 - x^2}{|y^2 - 1|} dx dy = \iint_{D_1} \frac{x^2 y^2 - x^2}{1 - y^2} dx dy + \iint_{D_2} \frac{x^2 y^2 - x^2}{1 - y^2} dx dy + \iint_{D_3} \frac{x^2 y^2 - x^2}{y^2 - 1} dx dy =$$

$$\int_0^1 -x^2 dx \int_{\sqrt{x-1}}^x dy + \int_1^2 -x^2 dx \int_{1-\sqrt{x}}^1 dy + \int_1^2 x^2 dx \int_1^x dy = \int_0^1 -x^2 [y]_{\sqrt{x-1}}^x dx + \int_1^2 -x^2 [y]_{1-\sqrt{x}}^1 dx + \int_1^2 x^2 [y]_1^x dx =$$

$$\int_0^1 -x^2 [x - \sqrt{x} + 1] dx + \int_1^2 -x^2 [1 - 1 + \sqrt{x}] dx + \int_1^2 x^2 [x - 1] dx =$$

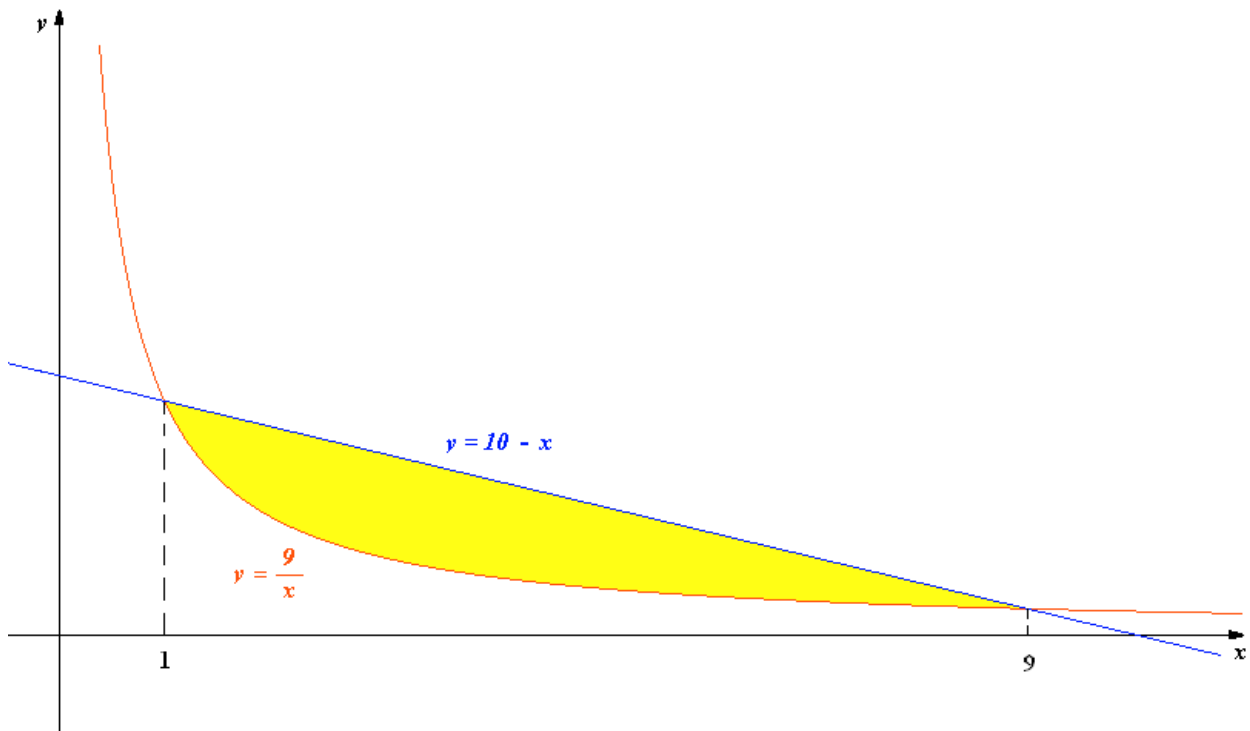
$$\int_0^1 \left(-x^3 + x^{\frac{3}{2}} - x^2 \right) dx + \int_1^2 -x^{\frac{3}{2}} dx + \int_1^2 (x^3 - x^2) dx = \left(-\frac{x^4}{4} + \frac{x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} - x^3 \right)_0^1 + \left(-x^{\frac{5}{2}} \right)_1^2 + \left(\frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} \right)_1^2$$

$$= -\frac{1}{4} + \frac{2}{5} - 1 - \sqrt{2^5} + 1 + 4 - \frac{8}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} = \frac{47}{30} - 4\sqrt{2}$$

Calcolare l'integrale curvilineo

$$\oint_{\gamma} y \ln\left(\frac{y}{ex}\right) dx + x \ln\left(\frac{ey}{x}\right) dy$$

dove γ è la curva chiusa che racchiude la regione $R = \left\{ (x, y) : \frac{9}{x} \leq y \leq 10 - x \right\}$



Parametrizzando le curve :

$$\gamma_1 = \begin{cases} x = t \\ y = \frac{9}{t} \end{cases} \quad 1 \leq t \leq 9 \quad , \quad \gamma_2 = \begin{cases} x = t \\ y = 10 - t \end{cases} \quad 1 \leq t \leq 9$$

e considerando il verso di percorrenza antiorario si ha :

$$\oint_{\gamma} y \ln\left(\frac{y}{ex}\right) dx + x \ln\left(\frac{ey}{x}\right) dy = \int_{\gamma_1} y \ln\left(\frac{y}{ex}\right) dx + x \ln\left(\frac{ey}{x}\right) dy + \int_{\gamma_2} y \ln\left(\frac{y}{ex}\right) dx + x \ln\left(\frac{ey}{x}\right) dy =$$

$$\int_1^9 \left[\frac{9}{t} \ln\left(\frac{9}{et^2}\right) - \frac{9}{t} \ln\left(\frac{9e}{t^2}\right) \right] dt + \int_9^1 \left[(10-t) \ln\left(\frac{10-t}{et}\right) - t \ln\left(\frac{e(10-t)}{t}\right) \right] dt =$$

$$\int_1^9 \frac{9}{t} \ln\left(\frac{1}{e^2}\right) dt + \int_9^1 [(10-t)[\ln(10-t) - \ln(et)] - t[\ln(e(10-t)) - \ln t] dt =$$

$$\int_1^9 -\frac{18}{t} dt + \int_9^1 [-2t \ln(10-t) + 10 \ln(10-t) - 10 - 10 \ln t] dt =$$

$$[-18 \ln t]_1^9 + \int_9^1 [(10-2t) \ln(10-t) - 10 - 10 \ln t] dt =$$

$$[-18 \ln t]_1^9 + \int_9^1 [(10-2t) \ln(10-t) - 10 - 10 \ln t] dt =$$

$$18 \ln 9 + \left[-\frac{1}{4}(10-2t)^2 \ln(10-t) - \frac{1}{2} \int_9^1 \frac{(10-2t)^2}{(10-t)} dt - 10t + 10t - 10t \ln t \right]_9^1 =$$

$$18 \ln 9 + \left[-\frac{1}{4}(10-2t)^2 \ln(10-t) - \frac{1}{2} \int_9^1 \frac{(10-2t)^2}{(10-t)} dt - 10t + 10t - 10t \ln t \right]_9^1 =$$

$$18 \ln 9 + \left[-\frac{1}{4}(10-2t)^2 \ln(10-t) - \frac{1}{2} \int_9^1 \frac{(10-2t)^2}{(10-t)} dt - 10t + 10t - 10t \ln t \right]_9^1 =$$

$$18 \ln 9 - 16 \ln 9 + 90 \ln 9 + \left[-\frac{1}{2} \int_9^1 -4t dt - \frac{1}{2} \int_9^1 \frac{100}{10-t} dt \right]_9^1 = 126 \ln 9 - 80$$

Risolvere l'equazione differenziale

$$y'' - 2y' = 4(\sin 2x - \cos 2x) - 6(x^2 - 3x + 1)$$

Dall'equazione caratteristica associata :

$$\lambda^2 - 2\lambda = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 2 \end{cases}$$

per cui un integrale generale dell'equazione risulta :

$$y = c_1 + c_2 e^{2x} + \varphi(x)$$

con $\varphi(x) = a \sin 2x + b \cos 2x + x(a_1 x^2 + b_1 x + c)$

Per le relative derivate :

$$\varphi'(x) = 2a \cos 2x - 2b \sin 2x + (a_1 x^2 + b_1 x + c) + 2a_1 x^2 + b_1 x$$

$$\varphi''(x) = -4a \sin 2x - 4b \cos 2x + 2a_1 x + b_1 + 4a_1 x + b_1$$

e sostituendo nell'equazione di partenza :

$$-4a \sin 2x - 4b \cos 2x + 6a_1 x + 2b_1 - 2(2a \cos 2x - 2b \sin 2x + 3a_1 x^2 + 2b_1 x + c) = 4(\sin 2x - \cos 2x) - 6(x^2 - 3x + 1)$$

$$(4b - 4a) \sin 2x - (4a + 4b) \cos 2x - 6a_1 x^2 + (6a_1 - 4b_1)x + 2b_1 - 2c = 4(\sin 2x - \cos 2x) - 6(x^2 - 3x + 1)$$

dal sistema relativo si ha :

$$\begin{cases} 4b - 4a = 4 \\ 4b + 4a = 4 \\ 6a_1 = 6 \\ 6a_1 - 4b_1 = 18 \\ 2b_1 - 2c = -6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 1 \\ a_1 = 1 \\ b_1 = -3 \\ c = 0 \end{cases}$$

con la soluzione particolare dell'equazione :

$$y = c_1 + c_2 e^{2x} + \cos 2x + x^3 - 3x^2$$

Volendo verificare il risultato ottenuto :

$$y' = 2c_2 e^{2x} - 2 \sin 2x + 3x^2 - 6x$$

$$y'' = 4c_2 e^{2x} - 4 \cos 2x + 6x - 6$$

da cui sostituendo nell'equazione iniziale :

$$4c_2 e^{2x} - 4 \cos 2x + 6x - 6 - 2(2c_2 e^{2x} - 2 \sin 2x + 3x^2 - 6x) = 4(\sin 2x - \cos 2x) - 6(x^2 - 3x + 1)$$

$$4c_2 e^{2x} - 4c_2 e^{2x} + 4(\sin 2x - \cos 2x) - 6x^2 + 18x - 6 = 4(\sin 2x - \cos 2x) - 6(x^2 - 3x + 1)$$

$$0 = 0$$

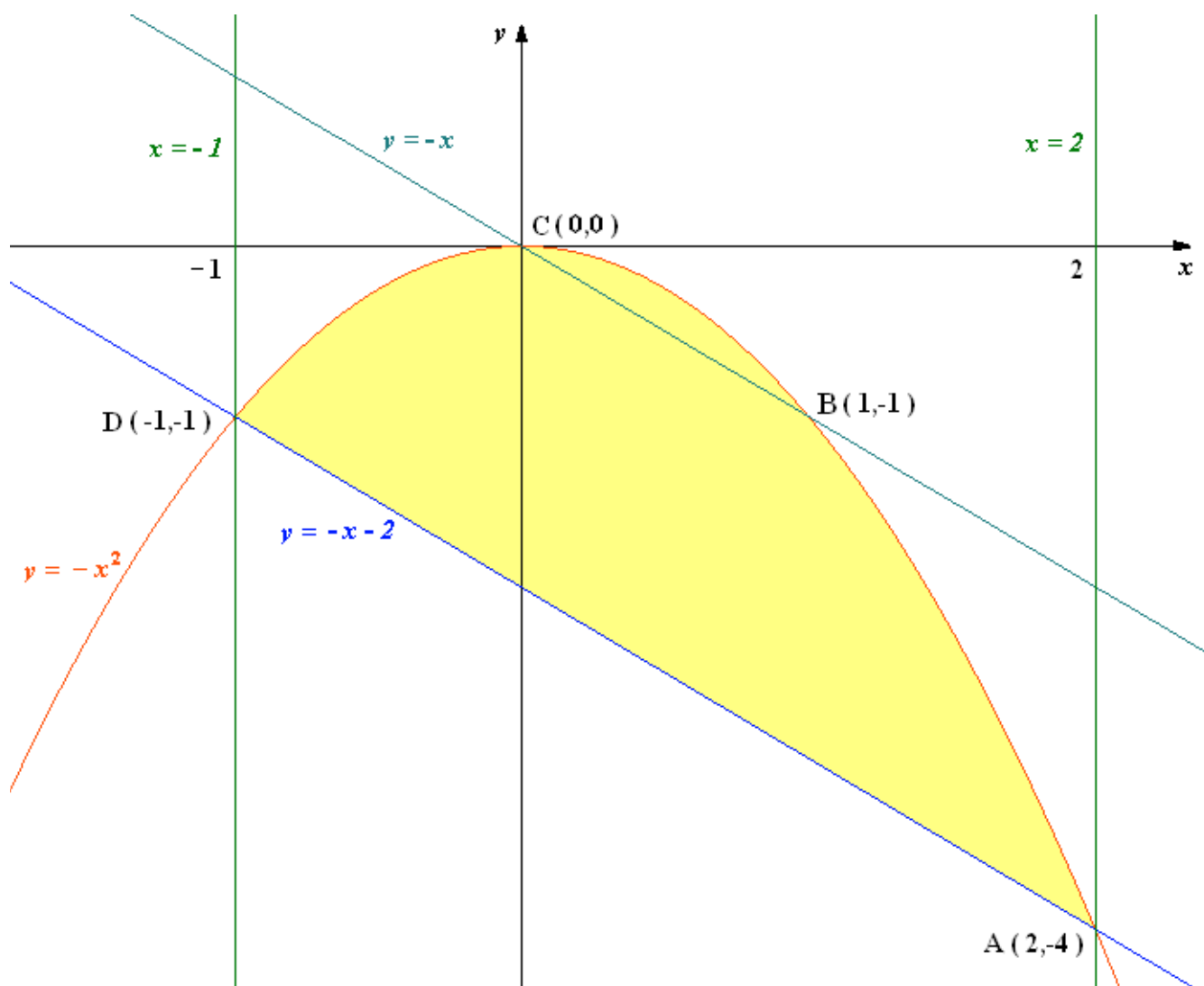
e ciò verifica la bontà del risultato.

Determinare i massimi e i minimi della funzione

$$f(x, y) = \ln|x + y| + (x + y)$$

nell'insieme $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq x \leq 2, -2 - x \leq y \leq -x^2\}$.

Calcolando il C.E. : $x + y \neq 0 \Rightarrow y \neq -x$ e rappresentando graficamente l'insieme D :



Per la definizione di valore assoluto : $|x+y| \Rightarrow \begin{cases} x+y & \text{se } y > -x \\ -x-y & \text{se } y < -x \end{cases}$

E quindi :

$$f(x,y) = \begin{cases} \ln(x+y) + (x+y) & \text{se } y > -x \\ \ln(-x-y) + (x+y) & \text{se } y < -x \end{cases}$$

Se $y > -x$ $\Rightarrow f(x,y) = \ln(x+y) + (x+y)$

Dalla condizione necessaria per i massimi e i minimi : $\begin{cases} f(x,y)_x = 0 \\ f(x,y)_y = 0 \end{cases}$

$$\begin{cases} \frac{1}{x+y} + 1 = 0 \\ \frac{1}{x+y} + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \{x+y+1=0 \Rightarrow P(x,-x-1) \text{ non accettabili.}$$

Se $y < -x$ $\Rightarrow f(x,y) = \ln(-x-y) + (x+y)$

$$\begin{cases} \frac{1}{x+y} + 1 = 0 \\ \frac{1}{x+y} + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \{x+y+1=0 \Rightarrow P(x,-x-1) \text{ punti critici.}$$

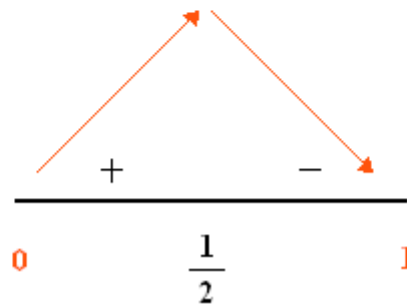
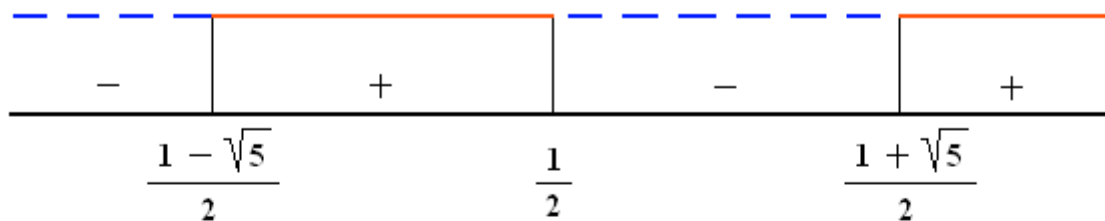
Sostituendo nella funzione si ha : $f(x,-x-1) = -1$

Esaminiamo ora i punti della frontiera ∂D .

Per $y > -x$ con $y = -x^2 \Rightarrow f(x, y) = \ln(x - x^2) + (x - x^2)$

$$f'(x) = \frac{1-2x}{(x-x^2)} + (1-2x) \Rightarrow f'(x) = (1-2x) \left(\frac{-x^2+x+1}{x-x^2} \right)$$

Segno : $f'(x) > 0 \Rightarrow (1-2x)(-x^2+x+1) > 0 \Rightarrow \frac{1-\sqrt{5}}{2} < x < \frac{1}{2}, \quad x > \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

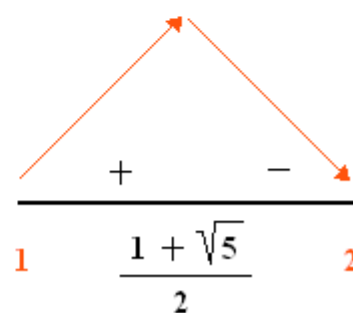
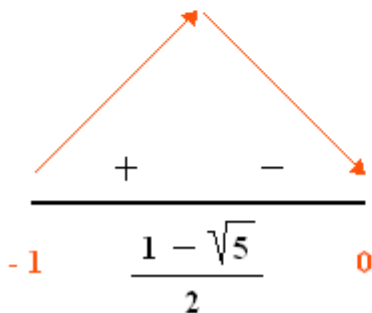
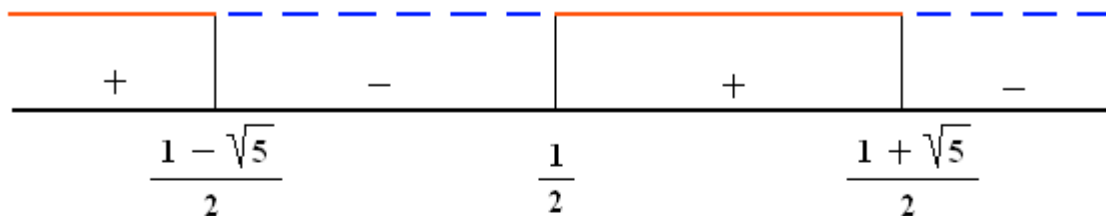


Sostituendo nella funzione si ha : $f\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{4} - \ln 4$ punto di massimo.

Per $y < -x$ con $y = -x^2 \Rightarrow f(x, y) = \ln(-x + x^2) + (x - x^2)$

$$f'(x) = \frac{-1+2x}{(-x+x^2)} + (1-2x) \Rightarrow f'(x) = (1-2x) \left(\frac{x^2-x-1}{-x+x^2} \right)$$

$$\text{Segno : } f'(x) > 0 \Rightarrow (1-2x)(x^2-x-1) > 0 \Rightarrow x < \frac{1-\sqrt{5}}{2}, \quad \frac{1}{2} < x < \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$



Sostituendo nella funzione si ha :

$$f(P_2) = f\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}, -\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2\right) = -1 \quad \text{punto di massimo.}$$

$$f(P_3) = f\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}, -\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2\right) = -1 \quad \text{punto di massimo.}$$

Per $y < -x$ con $y = -x - 2 \Rightarrow f(x, y) = \ln 2 - 2$

Riassumendo la funzione $f(x, y) = \ln|x+y| + x + y$ assume **massimi relativi** nei punti $P_1\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}\right)$ e nei punti della retta $y = -x - 1$.

