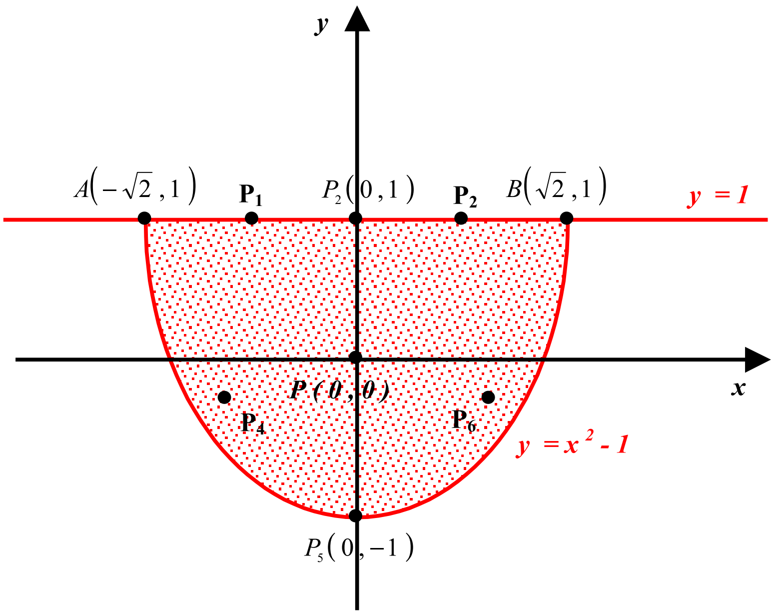
1. Determinare massimi e minimi della funzione

$$\boxed{f(x\,,y\,)=x^4-x^2y+2y^2}$$

in $D=\{(x\,,y):x^2-1\le y\le 1\}$.



Dalla condizione necessaria per l'esistenza di massimi e minimi relativi si ha :

$$\begin{cases} f'_x=0 \\ f'_y=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4x^3-2xy=0 \\ -x^2+4y=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x(2x^2-y)=0 \\ y=\dfrac{x^2}{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}$$

quindi $P(\,0\,,0\,)$ è un punto critico .

Valutando il valore dell'Hessiano in P si ha :

$$H(\,x\,,y\,)=\begin{vmatrix} f'_{xx} & f'_{xy} \\ f'_{yx} & f'_{yy} \end{vmatrix}=f'_{xx}\,f'_{yy}-f'^{\,2}_{xy}$$

$f'_{xx}=12x^2-2y$, $f'_{yy}=4$, $f'_{xy}=-2x$

$$H(0,0)=\begin{vmatrix}0 & 0\\ 0 & 4\end{vmatrix}=0$$

per cui in $P(0,0)$ il valore della funzione è $f(0,0)=0$.

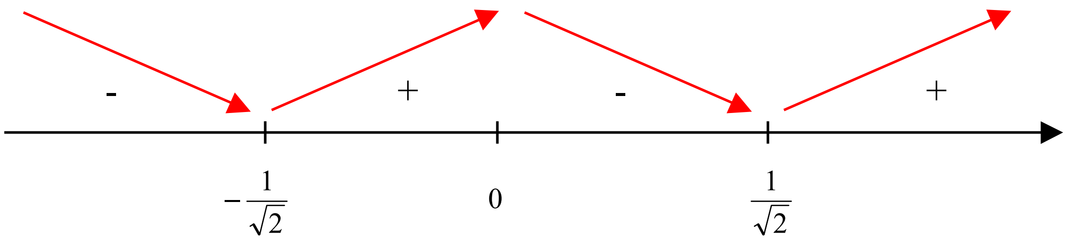
Poiché l'Hessiano in P ha valore nullo , nulla si può concludere circa l'esistenza di un massimo o di un minimo .

Valutiamo ora i punti vincolati sulla frontiera :

Per i punti della retta $y=1$ la funzione diventa : $f(x)=x^4-x^2+2$

$$f'(x)=4x^3-2x \quad , \quad f'(x)>0 \quad \Rightarrow \quad 2x(2x^2-1)>0$$

$$f'(x)>0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x>0 \\ 2x^2-1>0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x>0 \\ x<-\frac{1}{\sqrt{2}} \quad , \quad x>+\frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad -\frac{1}{\sqrt{2}}<x<0 \quad , \quad x>\frac{1}{\sqrt{2}}$$



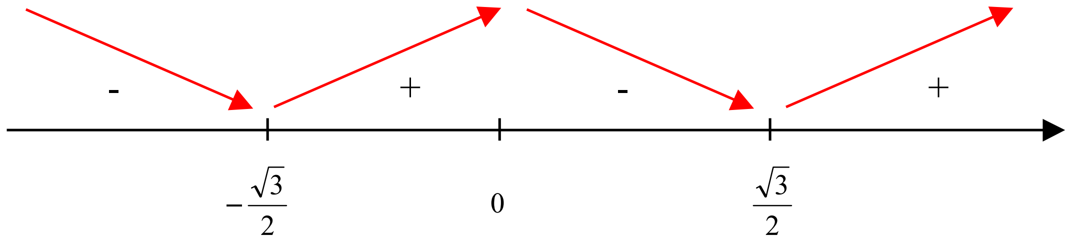
$$f(P_1)=f\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},1\right)=\frac{7}{4} \quad , \quad f(P_2)=f(0,1)=2 \quad , \quad f(P_3)=f\left(+\frac{1}{\sqrt{2}},1\right)=\frac{7}{4}$$

Per i punti della parabola $y=x^2-1$ la funzione diventa :

$$f(x)=x^4-x^2(x^2-1)+2(x^2-1)^2 \quad , \quad f(x)=2x^4-3x^2+2$$

$$f'(x)=8x^3-6x \quad , \quad f'(x)>0 \quad \Rightarrow \quad 2x(4x^2-3)>0$$

$$f'(x)>0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x>0 \\ 4x^2-3>0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x>0 \\ x<-\dfrac{\sqrt{3}}{2} \quad , \quad x>+\dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad -\frac{\sqrt{3}}{2}<x<0 \quad , \quad x>\frac{\sqrt{3}}{2}$$



$$f(P_4)=f\left(-\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{1}{4}\right)=\frac{7}{8} \quad , \quad f(P_5)=f(0,-1)=2 \quad , \quad f(P_6)=f\left(\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{1}{4}\right)=\frac{7}{8}$$

calcolando infine i valori della funzione nei punti $A\left(-\sqrt{2},1\right)$ e $B\left(\sqrt{2},1\right)$ si ottiene :

$$f(A)=f\left(-\sqrt{2},1\right)=4 \quad , \quad f(B)=f\left(+\sqrt{2},1\right)=4$$

e riassumendo si ha :

$f(x,y)$ assume **max. assoluti** in A e B

$f(x,y)$ assume **min. assoluto** in P

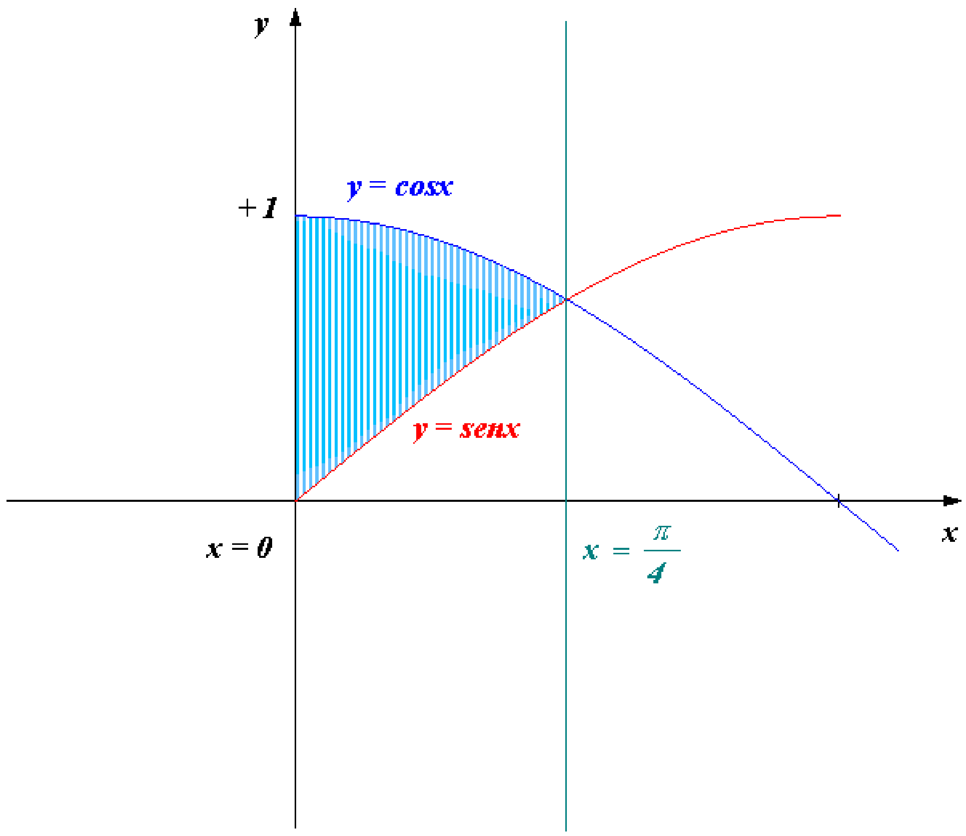
$f(x,y)$ assume **max. relativi** in P_2 e P_5

$f(x,y)$ assume **min. relativi** in P_1 , P_3 , P_4 e P_6

2. Calcolare l'integrale doppio

$$\boxed{\iint_D \operatorname{arcsen} y \; dxdy}$$

con $D = \left\{ (x\,,y) : 0 \le x \le \frac{\pi}{4} \;\; , \;\; \operatorname{sen} x \le y \le \cos x \right\}.$



Considerando il dominio normale a x si ha :

$$\iint_D \operatorname{arcsen} y \; dxdy = \int_0^{\frac{\pi}{4}} dx \int_{\operatorname{sen} x}^{\cos x} \operatorname{arcsen} y \; dy \qquad \text{posto} \quad \operatorname{arcsen} y = t \quad , \quad y = \operatorname{sen} t \quad , \quad dy = \cos t dt$$

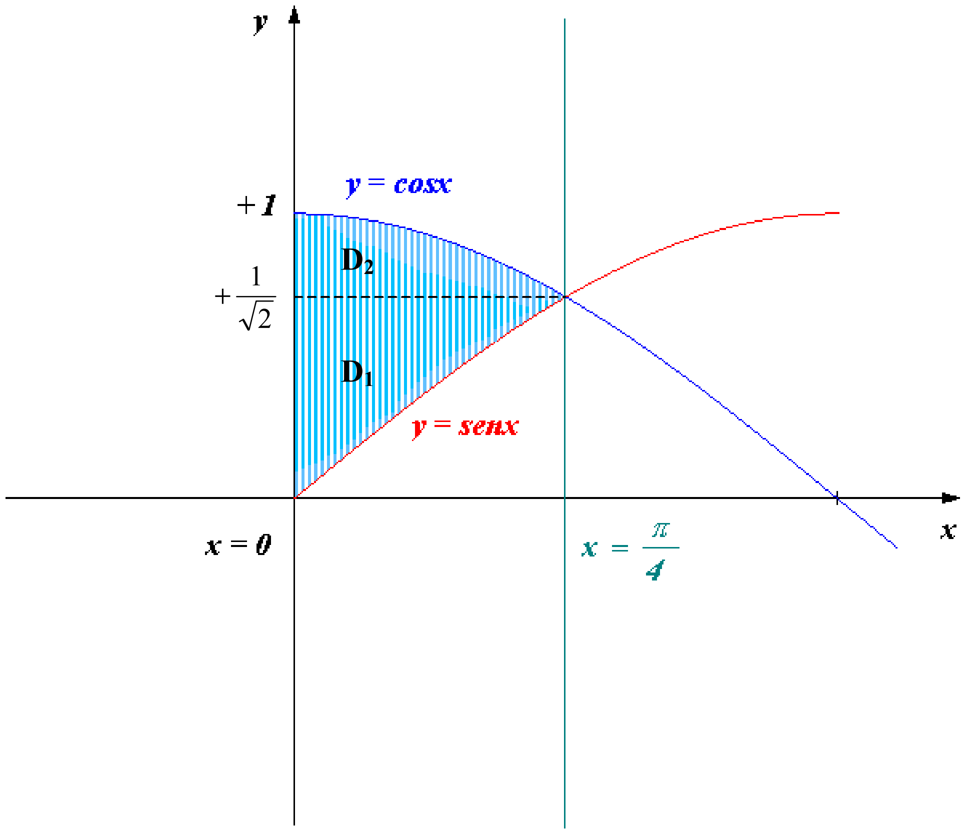
$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} dx \int_{\operatorname{sen} x}^{\cos x} \operatorname{arcsen} y \; dy = \int_0^{\frac{\pi}{4}} dx \int_x^{\frac{\pi}{2}-x} t \cos t \; dt = \int_0^{\frac{\pi}{4}} dx \left[t \operatorname{sen} t - \int_x^{\frac{\pi}{2}-x} \operatorname{sen} t \; dt \right]_x^{\frac{\pi}{2}-x} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} dx \left[t \operatorname{sen} t + \cos t \right]_x^{\frac{\pi}{2}-x}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left[\left(\frac{\pi}{2} - x \right) \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - x \right) + \cos\left(\frac{\pi}{2} - x \right) - x \operatorname{sen} x - \cos x \right] dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left[\left(\frac{\pi}{2} - x \right) \cos x + \operatorname{sen} x - x \operatorname{sen} x - \cos x \right] dx$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left[\left(\frac{\pi}{2}-1\right)\cos x+(1-x)\operatorname{sen} x - x\cos x\right]dx = \left(\frac{\pi}{2}-1\right)\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos x\,dx + \int_0^{\frac{\pi}{4}}\operatorname{sen} x\,dx - \int_0^{\frac{\pi}{4}} x\operatorname{sen} x\,dx - \int_0^{\frac{\pi}{4}} x\cos x\,dx =$$

$$\left[\left(\frac{\pi}{2}-1\right)\operatorname{sen} x - \cos x + x\cos x - \operatorname{sen} x - x\operatorname{sen} x - \cos x\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \left(\frac{\pi}{4}-2\right)\sqrt{2}+2$$

Allo stesso modo si poteva procedere considerando il dominio normale a y :



$$\iint_D \operatorname{arcsen} y\,dxdy = \iint_{D_1} \operatorname{arcsen} y\,dxdy + \iint_{D_2} \operatorname{arcsen} y\,dxdy$$

$$\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \operatorname{arcsen} y\,dy \int_0^{\operatorname{arcsen} y} dx + \int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{1} \operatorname{arcsen} y\,dy \int_0^{\arccos y} dx = \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \operatorname{arcsen}^2 y\,dy + \int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{1} \operatorname{arcsen} y \cdot \arccos y\,dy$$

posto $\operatorname{arcsen} y = t$, $y = \operatorname{sen} t$, $dy = \cos t dt$

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} t^2\cos t\,dt + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} t\cdot\left(\frac{\pi}{2}-t\right)\cos t\,dt = \left[t^2\operatorname{sen} t - \int_0^{\frac{\pi}{4}} 2t\operatorname{sen} t\,dt\right]_0^{\frac{\pi}{4}} - \left[t^2\operatorname{sen} t - \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} 2t\operatorname{sen} t\,dt\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} + \frac{\pi}{2}\left[t\operatorname{sen} t + \cos t\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$\left[t^2\operatorname{sen} t + 2t\cos t - 2\operatorname{sen} t\right]_0^{\frac{\pi}{4}} - \left[t^2\operatorname{sen} t + 2t\cos t - 2\operatorname{sen} t\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} + \frac{\pi}{2}\left[t\operatorname{sen} t + \cos t\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} = \left(\frac{\pi}{4}-2\right)\sqrt{2}+2$$

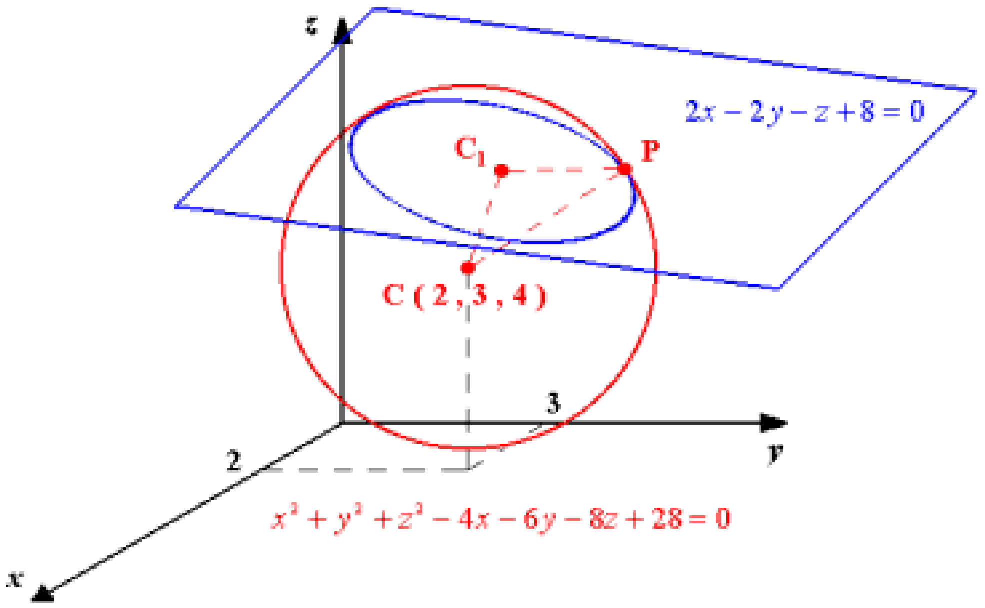
3. Determinare centro e raggio della circonferenza intersezione della sfera $x^2+y^2+z^2-4x-6y-8z+28=0$ **con il piano** $2x-2y-z+8=0$

Ricordando le formule che portano alle coordinate del centro e del raggio della sfera :

$$C\left(-\frac{a}{2},-\frac{b}{2},-\frac{c}{2}\right) \qquad , \qquad r=\frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2+c^2-4d}$$

si ha :

$$C(2,3,4) \qquad , \qquad r=\frac{1}{2}\sqrt{16+36+64-112}=1$$



Dalla formula della distanza di un punto da un piano $d(P_0\alpha)=\dfrac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$ si ha :

$$d(C\alpha)=\frac{|2\cdot 2-2\cdot 3-4+8|}{\sqrt{2^2+2^2+(-1)^2}}=\frac{2}{3}\;\left(\overline{C_1P}\right)$$

Applicando quindi la formula del teorema di Pitagora al triangolo CC_1P si arriva al valore del raggio richiesto della circonferenza .

$$\overline{CP}^2 = \overline{CC_1}^2 + \overline{C_1P}^2 \quad \Rightarrow \quad \overline{C_1P}^2 = \overline{CP}^2 - \overline{CC_1}^2 \quad \Rightarrow \quad r_1 = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$$

Determiniamo ora l'equazione della retta r passante per C e perpendicolare al piano assegnato .
Su tale retta si trova il centro C_1 della circonferenza e sarà , per l'appunto , determinato dal sistema retta – piano .

in forma parametrica la retta r è data da :

$$r = \begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = 3 - 2t \\ z = 4 - t \end{cases} \quad \text{con} \quad \vec{v}_r(2\,,-2\,,-1) \text{ vettore direttore della retta } r\,.$$

Per il sistema si ha : $2(2+2t) - 2(3-2t) - (4-t) + 8 = 0 \quad \Rightarrow \quad 9t + 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad t = -\frac{2}{9}$

E risostituendo in r : $C_1\left(\frac{14}{9}, \frac{31}{9}, \frac{38}{9}\right)$ centro della circonferenza .

4. Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' + tgx \cdot y = \operatorname{sen} 2x \\ y(0) = 2 \end{cases}$$

Dalla formula per le equazioni differenziali lineari :

$$\boxed{y' + p(x)y = q(x) \quad \Rightarrow \quad y = e^{-\int p(x)}\left[\int q(x) \cdot e^{\int p(x)} dx + c\right]}$$

Si ha :

$$y = e^{-\int tgx dx}\left[\int \operatorname{sen} 2x \cdot e^{\int tgx dx} dx + c\right] \;\Rightarrow\; y = e^{\ln(\cos x)}\left[\int \operatorname{sen} 2x \cdot e^{\ln(\cos x)^{-1}} dx + c\right]$$

$$y = \cos x\left[\int \frac{\operatorname{sen} 2x}{\cos x} dx + c\right] \;\Rightarrow\; y = \cos x\left[\int 2 \operatorname{sen} x dx + c\right] \;\Rightarrow\; y = \cos x[-2\cos x + c]$$

e per Cauchy :

$$\begin{cases} y = \cos x[-2\cos x + c] \\ y(0) = 2 \end{cases} \;\Rightarrow\; \begin{cases} 2 = -2 + c \\ y(0) = 2 \end{cases} \;\Rightarrow\; \begin{cases} c = 4 \\ y(0) = 2 \end{cases}$$

di qui quindi :

$$y = \cos x[-2\cos x + 4] \,.$$