1. **Trovare gli eventuali punti di massimo o minimo relativo della funzione**

$$\boxed{f(x\,,y\,)=(x+y)e^{-xy}}$$

Dalla condizione necessaria per l'esistenza di massimi e minimi relativi si ha :

$$\begin{cases} f'_x=0 \\ f'_y=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} e^{-xy}-y(x+y)e^{-xy}=0 \\ e^{-xy}-x(x+y)e^{-xy}=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (1-xy-y^2)e^{-xy}=0 \\ (1-xy-x^2)e^{-xy}=0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (1-xy-y^2)=0 \\ (1-xy-x^2)=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1-xy=y^2 \\ y^2-x^2=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1-xy=y^2 \\ y=\pm x \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x=\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ y=x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ y=\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

quindi $P_1\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}},\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$, $P_2\left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}},-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$ sono punti critici .

Valutando il valore dell'Hessiano in P si ha :

$$H(\,x\,,y\,)=\begin{vmatrix} f'_{xx} & f'_{xy} \\ f'_{yx} & f'_{yy} \end{vmatrix}=f'_{xx}\,f'_{yy}-f'^{\,2}_{xy}$$

$$f'_{xx}=-ye^{-xy}-y(1-xy-y^2)e^{-xy}=e^{-xy}(-2y+xy^2+y^3)$$

$$f'_{yy}=-xe^{-xy}-x(1-xy-x^2)e^{-xy}=e^{-xy}(-2x+x^2y+x^3)$$

$$f'_{xy}=(-x-2y)e^{-xy}-x(1-xy-y^2)e^{-xy}=e^{-xy}(-2x-2y+x^2y+xy^2)=e^{-xy}(x+y)(xy-2)$$

Da cui si ha :

$$H(P_1)=H\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\begin{vmatrix}-\frac{1}{\sqrt{2e}} & -\frac{3}{2}\sqrt{\frac{2}{e}}\\ -\frac{3}{2}\sqrt{\frac{2}{e}} & -\frac{1}{\sqrt{2e}}\end{vmatrix}=-\frac{4}{e}$$ e poiché $f'_{xx}=-\frac{1}{\sqrt{2e}}<0$

il punto P_1 è per la funzione un punto di **massimo relativo** con valore :

$$f(P_1)=f\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\sqrt{\frac{2}{e}}$$

$$H(P_2)=H\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\begin{vmatrix}+\frac{1}{\sqrt{2e}} & +\frac{3}{2}\sqrt{\frac{2}{e}}\\ +\frac{3}{2}\sqrt{\frac{2}{e}} & +\frac{1}{\sqrt{2e}}\end{vmatrix}=-\frac{4}{e}$$ e poiché $f'_{xx}=-\frac{1}{\sqrt{2e}}<0$

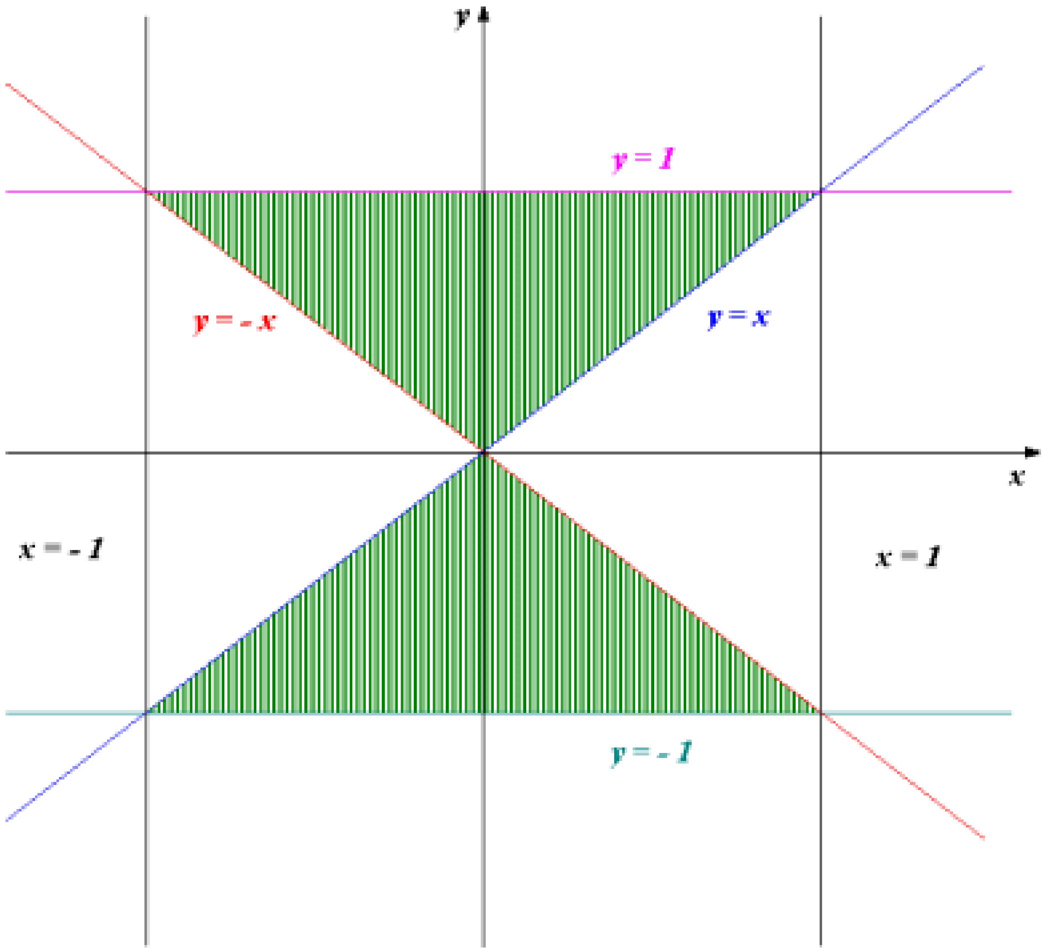
il punto P_2 è per la funzione un punto di **massimo relativo** con valore :

$$f(P_2)=f\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=-\sqrt{\frac{2}{e}}$$

2. Calcolare l'integrale doppio

$$\boxed{\iint_D \sqrt{1-y^2}\ dxdy}$$

dove $D=\left\{(x\,,\,y)\in \Re^2:\ -1\le x\le 1\ \ ,\ -1\le y\le 1\ \ ,\ |x|\le |y|\ \right\}.$



Considerando il dominio normale a y si ha :

$$\iint_D \sqrt{1-y^2}\ dxdy=\int_{-1}^{0} dy\int_{y}^{-y}\sqrt{1-y^2}\ dx+\int_{0}^{1} dy\int_{-y}^{y}\sqrt{1-y^2}\ dx$$

$$\iint_D \sqrt{1-y^2}\ dxdy=\int_{-1}^{0}\sqrt{1-y^2}\ dy\ [x]_{y}^{-y}+\int_{0}^{1}\sqrt{1-y^2}\ dy\ [x]_{-y}^{y}=\int_{-1}^{0}-2y\sqrt{1-y^2}dy\ +\int_{0}^{1}2y\sqrt{1-y^2}dy\ =$$

$$\int_{-1}^{0}-2y\sqrt{1-y^2}dy\ -\int_{0}^{1}-2y\sqrt{1-y^2}dy\ =\frac{2}{3}\left[\sqrt{\left(1-y^2\right)^3}\right]_{-1}^{0}-\frac{2}{3}\left[\sqrt{\left(1-y^2\right)^3}\right]_{0}^{1}=\frac{4}{3}$$