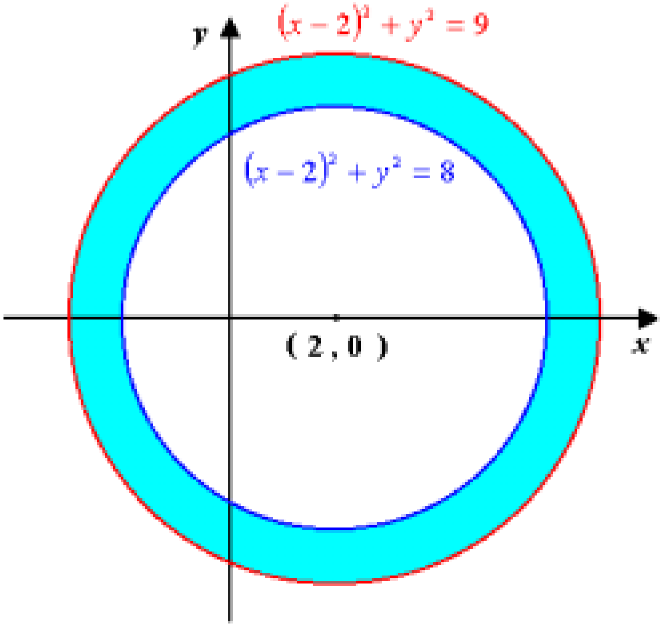
Trovare i massimi e i minimi assoluti della funzione $f(x, y) = \arccos\sqrt{4x+5-x^2-y^2}$

Dominio :

$$\begin{cases} 4x+5-x^2-y^2 \geq 0 \\ -1 \leq \sqrt{4x+5-x^2-y^2} \leq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4x+5-x^2-y^2 \geq 0 \\ \sqrt{4x+5-x^2-y^2} \leq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2+y^2-4x-5 \leq 0 \\ x^2+y^2-4x-4 \geq 0 \end{cases}$$

Poichè lo studio della funzione è riferito ad un dominio chiuso (vedi teorema di weierstrass) essa ammette il minimo ed il massimo assoluto in tale dominio .



Dalla condizione necessaria per i massimi e i minimi si ha :

$$\begin{cases} f'_x = 0 \\ f'_y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -\dfrac{\dfrac{4-2x}{2\sqrt{4x+5-x^2-y^2}}}{\sqrt{1-\left(4x+5-x^2-y^2\right)}} = 0 \\ -\dfrac{\dfrac{-2y}{2\sqrt{4x+5-x^2-y^2}}}{\sqrt{1-\left(4x+5-x^2-y^2\right)}} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-2=0 \\ y=0 \end{cases} \Rightarrow P(2, 0) \text{ punto critico}$$

Tale punto non può essere preso in considerazione poiché non appartenente al dominio .

Esaminiamo ora i punti vincolati sulla frontiera :

Per $\boxed{x^2 + y^2 - 4x - 5 = 0}$ si ha : $f(x, y) = \arccos(0) = \frac{\pi}{2}$

Per $\boxed{x^2 + y^2 - 4x - 4 = 0}$ si ha : $f(x, y) = \arccos(1) = 0$

E quindi riassumendo :

La funzione assume il **massimo assoluto** in tutti i punti della circonferenza $x^2 + y^2 - 4x - 5 = 0$

La funzione assume il **minimo assoluto** in tutti i punti della circonferenza $x^2 + y^2 - 4x - 4 = 0$

Risolvere il seguente problema di Cauchy $\begin{cases} y'' - 4y' + 3y = e^{3x} + x \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$

Risolvendo l'equazione caratteristica associata :

$$\lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0 \quad \Rightarrow \quad \left| \begin{array}{l} \lambda_1 = 1 \\ \lambda_2 = 3 \end{array} \right.$$

da cui l'integrale generale del tipo : $y(x) = c_1 e^x + c_2 e^{3x} + \varphi(x)$

Per la determinazione di $\varphi(x)$ si ha : $\varphi(x) = axe^{3x} + a_1 x + b$

$$\varphi'(x) = ae^{3x} + 3axe^{3x} + a_1$$

$$\varphi''(x) = 3ae^{3x} + 3ae^{3x} + 9axe^{3x}$$

sostituendo nell'equazione di partenza :

$$6ae^{3x} + 9axe^{3x} - 4\left(ae^{3x} + 3axe^{3x} + a_1\right) + 3\left(axe^{3x} + a_1 x + b\right) = e^{3x} + x$$

$$2ae^{3x} + 3a_1 x + 3b - 4a_1 = e^{3x} + x$$

si ha :

$$\begin{cases} 2a = 1 \\ 3a_1 = 1 \\ 3b - 4a_1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \dfrac{1}{2} \\ a_1 = \dfrac{1}{3} \\ b = \dfrac{4}{9} \end{cases}$$

ritornando quindi all'integrale generale : $y(x) = c_1 e^x + c_2 e^{3x} + \dfrac{x}{2} e^{3x} + \dfrac{x}{3} + \dfrac{4}{9}$

Per Cauchy :

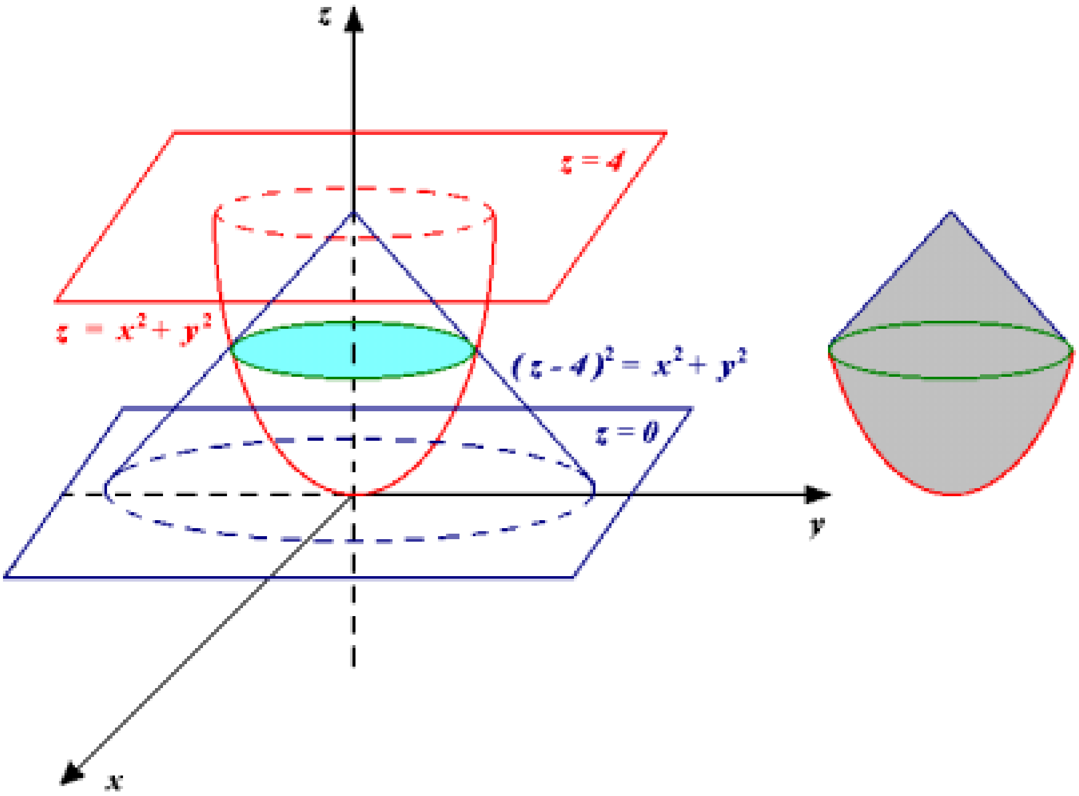
$$\begin{cases} y'' - 4y' + 3y = e^{3x} + x \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} y(x) = c_1 e^x + c_2 e^{3x} + \dfrac{x}{2} e^{3x} + \dfrac{x}{3} + \dfrac{4}{9} \\ y'(x) = c_1 e^x + 3c_2 e^{3x} + \dfrac{1}{2} e^{3x} + \dfrac{3}{2} xe^x + \dfrac{1}{3} \end{array}$$

$$\begin{cases} 0 = c_1 + c_2 + \dfrac{4}{9} \\ 1 = c_1 + 3c_2 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 + c_2 = -\dfrac{4}{9} \\ 1 = -c_2 - \dfrac{4}{9} + 3c_2 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 = -\dfrac{9}{4} \\ c_2 = \dfrac{11}{36} \end{cases}$$

e infine l'integrale particolare : $y(x) = -\dfrac{9}{4} e^x + \dfrac{11}{36} e^{3x} + \dfrac{x}{2} e^{3x} + \dfrac{x}{3} + \dfrac{4}{9}$.

Calcolare il volume del solido convesso compreso tra le superfici
$x^2 + y^2 = (z-4)^2 \quad , \quad z = x^2 + y^2$.

Trattandosi di due quadriche (cono e paraboloide) simmetriche rispetto all'asse z , possiamo determinare il volume del solido ottenuto come rotazione delle coniche generatrici intorno all'asse z



Dal sistema tra le due superfici si ha :

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = (z-4)^2 \\ z = x^2 + y^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = (z-4)^2 \\ z = (z-4)^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = (z-4)^2 \\ z^2 - 9z + 16 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = (z-4)^2 \\ z_{1/2} = \dfrac{9 \pm \sqrt{17}}{2} \end{cases}$$

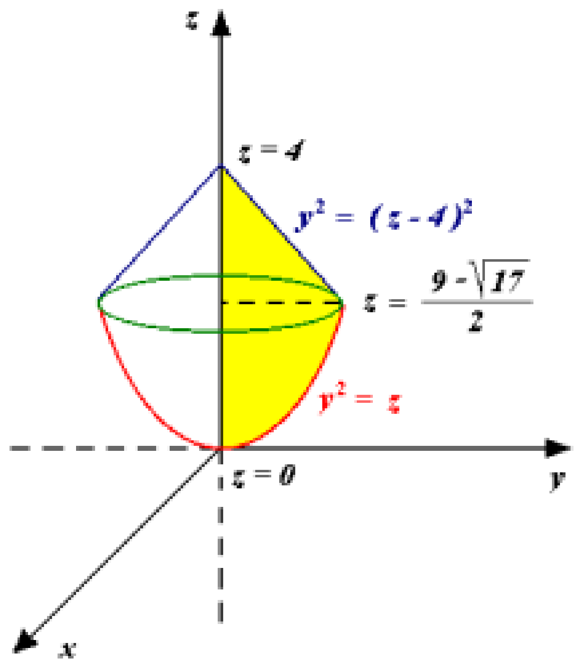
di cui il valore $z = \dfrac{9 - \sqrt{17}}{2}$ esprime l'equazione del piano secondo cui si intersecano le due superfici .

Allo stesso modo dai sistemi delle quadriche con i piani $z = 0$, $z = 4$ si ha :

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = (z-4)^2 \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 16 \\ z = 0 \end{cases} \quad , \quad \begin{cases} x^2 + y^2 = (z-4)^2 \\ z = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = z \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \quad , \quad \begin{cases} x^2 + y^2 = z \\ z = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ z = 4 \end{cases}$$

utilizzando la formula del volume del solido di rotazione $\boxed{V = \pi \int_a^b f^2(z)dz}$ si ha :



che il volume della porzione di solido formato dall'intersezione tra le due superfici è dato da :

$$V = \pi\left(\int_0^{\frac{9-\sqrt{17}}{2}} z dz + \int_{\frac{9-\sqrt{17}}{2}}^{4} (z-4)^2 dz \right) = \pi\left\{ \left[\frac{z^2}{2}\right]_0^{\frac{9-\sqrt{17}}{2}} + \left[\frac{(z-4)^3}{3}\right]_{\frac{9-\sqrt{17}}{2}}^{4} \right\} = \pi\left[\frac{\left(9-\sqrt{17}\right)^2}{8} - \frac{\left(1-\sqrt{17}\right)^3}{24}\right]$$

$$= \pi\left[\frac{121+\sqrt{17}}{12}\right]$$

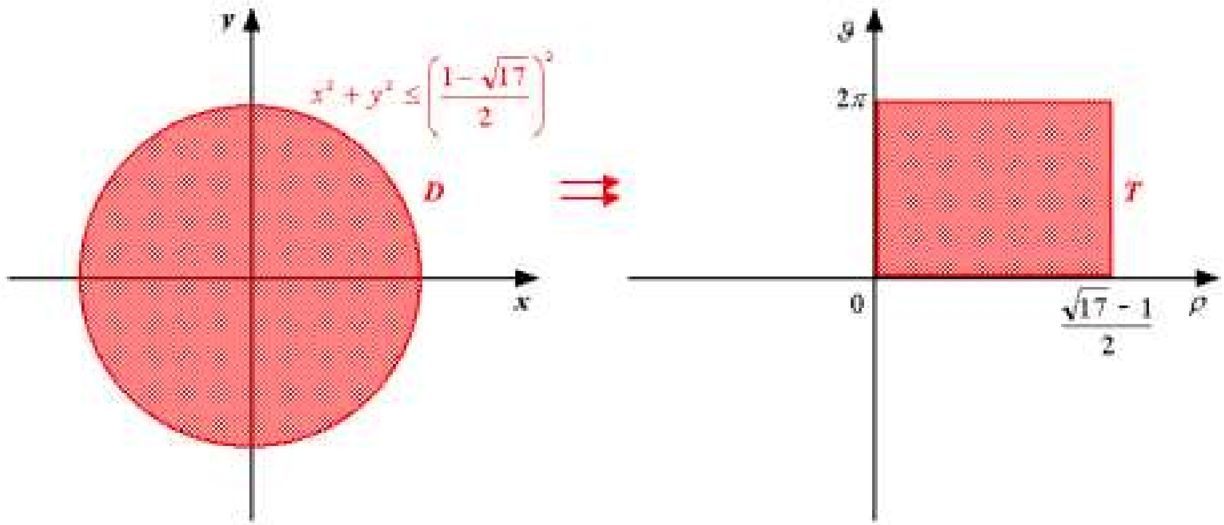
Analogamente si poteva procedere tramite la formula dell'integrale doppio :

$$\boxed{V = \iint_D \left[f_2(x, y) - f_1(x, y) \right] dxdy}$$

Con $f_2(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2} + 4$, $f_1(x, y) = x^2 + y^2$ e $D = \left\{ (x, y) \in \Re^2 : x^2 + y^2 \le \left(\frac{\sqrt{17} - 1}{2} \right)^2 \right\}$

Con l'uso delle coordinate polari si ha :

$$\begin{cases} x = \rho \cos \vartheta \\ y = \rho \operatorname{sen} \vartheta \end{cases} \qquad \text{con} \qquad 0 \le \vartheta \le 2\pi \quad , \quad 0 \le \rho \le \left(\frac{\sqrt{17} - 1}{2} \right)$$



$$V = \iint_D \left[\left(\sqrt{x^2 + y^2} + 4 \right) - \left(x^2 + y^2 \right) \right] dxdy \quad = \iint_T \left[\rho + 4 - \rho^2 \right] \rho d\rho d\vartheta$$

$$\int_0^{2\pi} d\vartheta \int_0^{\frac{\sqrt{17}-1}{2}} \left(-\rho^3 + \rho^2 + 4\rho \right) d\rho \;=\; \int_0^{2\pi} d\vartheta \left[-\frac{\rho^4}{4} + \frac{\rho^3}{3} + 2\rho^2 \right]_0^{\frac{\sqrt{17}-1}{2}} \;=\; \frac{121 + \sqrt{17}}{24} \int_0^{2\pi} d\vartheta \;=\; \pi \left(\frac{121 + \sqrt{17}}{12} \right)$$