Questionario a risposta multipla (di cui solo una è esatta)

1. La soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y''+6y'+13y = 2e^{-3x} \\ y(0)=1 \\ y\left(\frac{\pi}{4}\right)=0 \end{cases}$$

verifica anche la condizione :

1) $y(\pi)=0$.
2) $y\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{e^{-\frac{\pi}{6}}}{2}$
3) $y\left(\frac{\pi}{3}\right)=0$
4) $y\left(\frac{\pi}{8}\right)=\frac{e^{-\frac{3\pi}{8}}}{2}$

2. Sia A l'area dell'insieme $D=\left\{ (x\, ,y)\in \Re^2 \quad t.c. \ \frac{(y+3)}{2} \le x \le 3-y^2 \right\}$. Si ha :

1) $A=\frac{125}{48}$
2) $A=\frac{21}{8}$
3) $A=\frac{15}{6}$
4) $A=\frac{31}{12}$

3. Sia D il dominio della funzione

$$f(x,y)=\sqrt{(|x|-y^2-1)(4y-y^2-4)}$$

Allora :

1) Il punto $(1,0)$ è di frontiera e D è aperto
2) Il punto $(-2,0)$ è interno e D non è aperto
3) Il punto $(3,2)$ è di accumulazione e D è aperto
4. Il punto $(-1,2)$ non è di frontiera e D non è aperto

4. Sia $k \in \Re$; la retta tangente alla conica $(1-k)x^2+y^2-3kx+2ky-2k-1=0$ nel punto $(0,1)$:

1) se $k=-\frac{1}{2}$, passa anche per $(1,-1)$
2) è parallela all'asse delle ascisse solo se $k=-1$
3) se $k=2$, è parallela ad una bisettrice degli assi
4) passa anche per $(-1,1)$ se $k=\frac{1}{3}$

5. Siano $z=a+ib$ i numeri complessi tali che $z^5=-3i$. Si ha :

1) $b=0$ per due valori di z
2) $a+b=0$ per un solo valore di z
3) $a=0$ per un solo valore di z
4) $a=b$ per due valori di z

6. Sia $k \in \Re$ e sia

$$f(x,y)=\frac{\operatorname{arctg}(x+y^3)}{(|x|+|y|)^k} \quad \text{se } (x,y)\neq(0,0).$$

La funzione f si estende ad una funzione continua su $\Re^2$:

1) se $k<1$
2) se e solo se $k \geq 1$
3) $\forall\, k \leq 1$
4) solo se $\frac{1}{2}<k<1$

7) Sia $F(t)=\int_{-1}^{t}\frac{e^x}{e^{2x}+1+2e^x}\,dx$. Allora :

1) $2F(\ln(2e+1))=2F(0)+F(1)$
2) $F(1)=2F(0)$
3) F non è ben definita se $t\le -1$
4) $2F(\ln(2e+1))=F(1)$

8) Sia $f(x\,,\,y\,)=(-x)^x+y^y$ e sia $D=\left\{\,(x\,,y)\in\Re^2\;\; t.c.\;\; -1\le x\le -\frac{1}{e}\,,\frac{1}{e}\le y\le e\,\right\}$
Siano M il massimo ed m il minimo di f su D . Allora :

1) f non ha punti stazionari interni e $M=e^e+e^{\frac{1}{e}}$
2) f ha punti stazionari interni e $m=1+\left(\frac{1}{e}\right)^{\frac{1}{e}}$
3) f non è definita su tutto D
4) $M=1+e^e\;\; m=1+\left(\frac{1}{e}\right)^{\frac{1}{e}}$

9) Sia $U(x\,,\,y\,)$ la primitiva della forma differenziale $(e^x\cos y-x^2)dx+(y-e^x\,\mathrm{sen}\,y)dy$ tale che $U(0\,,\,0\,)=2$. Si ha :

1) $U\left(\frac{\pi}{2}\,,\pi\,\right)=-e^{\frac{\pi}{2}}-\frac{\pi^3}{3}$
2) $U\left(\pi\,,\frac{\pi}{2}\,\right)=-\pi^3$
3) $U\left(1\,,\frac{\pi}{2}\,\right)=\frac{\pi^2}{8}+\frac{2}{3}$
4) $U(0\,,\pi\,)=\pi^2$

Svolgimento :

1. Risolvendo l'equazione caratteristica associata all'omogenea si ha :

$$\lambda^2 + 6\lambda + 13 = 0 \quad \Rightarrow \quad \left| \begin{array}{l} \lambda_1 = -3 - 2i \\ \lambda_2 = -3 - 2i \end{array} \right.$$

E per l'integrale generale : $y = e^{-3x}\left(c_1 \cos 2x + c_2 \cos 2x\right) + \varphi(x)$

per l'integrale particolare : $\varphi(x) = ae^{-3x}$

da cui derivando : $\varphi'(x) = -3ae^{-3x}$, $\varphi''(x) = 9ae^{-3x}$

si ha quindi che : $9ae^{-3x} - 18ae^{-3x} + 13ae^{-3x} = 2e^{-3x} \quad \Rightarrow \quad 4a = 2 \quad \Rightarrow \quad a = \frac{1}{2}$

da cui l'integrale generale : $y = e^{-3x}\left(c_1 \cos 2x + c_2 \,\mathrm{sen}\, 2x\right) + \frac{e^{-3x}}{2}$

e per Cauchy : $\begin{cases} y(0) = 1 \\ y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 + \frac{1}{2} = 1 \\ c_2 e^{-\frac{3}{4}\pi} + \frac{e^{-\frac{3}{4}\pi}}{2} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 = \frac{1}{2} \\ c_2 = -\frac{1}{2} \end{cases}$

per arrivare all'integrale particolare : $y = \frac{e^{-3x}}{2}\left(\cos 2x - \mathrm{sen}\, 2x + 1\right)$

che verifica anche la condizione $y\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{e^{-\frac{3\pi}{8}}}{2}$.

ne consegue la risposta esatta n° 4) .

2. Risolvendo il sistema tra la retta e la parabola si ha :

$$\begin{cases} y = 2x-3 \\ x = 3-y^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 2x-3 \\ x = 3-(2x-3)^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 2x-3 \\ 4x^2-11x+6=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_1 = -\dfrac{3}{2} \\ x_1 = \dfrac{3}{4} \end{cases} , \quad \begin{cases} y_2 = 1 \\ x_2 = 2 \end{cases}$$

e dal grafico relativo del dominio assegnato :

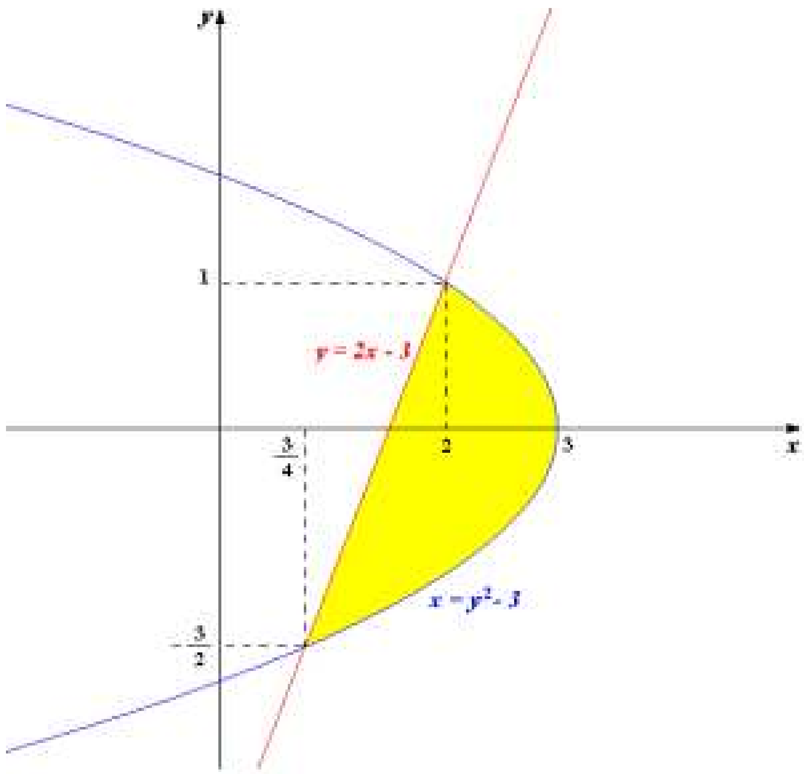
$$A = \int_{\frac{3}{4}}^{2} (2x-3)dx + \int_{2}^{3} \sqrt{3-x}\,dx + \int_{3}^{\frac{3}{4}} -\sqrt{3-x}\,dx =$$

$$= \left(x^2-3x\right)_{\frac{3}{4}}^{2} - \frac{2}{3}\left[\sqrt{(3-x)^3}\right]_{2}^{3} + \frac{2}{3}\left[\sqrt{(3-x)^3}\right]_{3}^{\frac{3}{4}} = \left(4-6-\frac{9}{16}+\frac{9}{4}\right)+\frac{2}{3}+\frac{9}{4}=\frac{125}{48}$$

Allo stesso modo si poteva procedere integrando rispetto alla variabile y :

$$A = \int_{-\frac{3}{2}}^{1} \left(3-y^2\right)dy + \int_{1}^{-\frac{3}{2}} \frac{y+3}{2}\,dy =$$

$$A = \left(3y-\frac{y^3}{3}\right)_{-\frac{3}{2}}^{1} + \frac{1}{2}\left(\frac{y^2}{2}+3y\right)_{1}^{-\frac{3}{2}} = \left(3-\frac{1}{3}+\frac{9}{2}-\frac{9}{8}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{9}{8}-\frac{9}{2}-\frac{1}{2}-3\right)=\left(\frac{145}{24}\right)+\left(\frac{-55}{16}\right)=\frac{125}{48}$$



ne consegue la risposta esatta n° 1) .

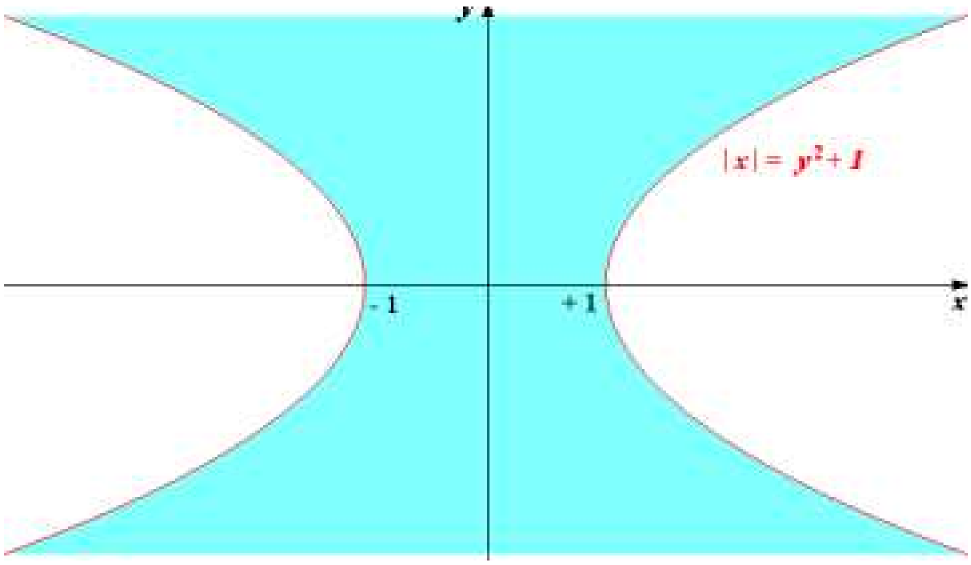
3. Dal calcolo del C.E. della funzione si ha : Sia D il dominio della funzione

$$C.E.\quad (|x|-y^2-1)(4y-y^2-4)\geq 0 \quad\Rightarrow\quad \left|\begin{array}{l}(|x|-y^2-1)\geq 0\\(4y-y^2-4)\geq 0\end{array}\right. \quad\Rightarrow\quad \left|\begin{array}{l}x\leq -y^2-1\ ,\ x\geq y^2+1\\ \forall y\in\Re-\{2\}\end{array}\right.$$

Quindi dalla risoluzione della disequazione fattoriale si ha :

$$C.E.\quad \{\forall(x,y)\in\Re^2 :\ -y^2-1\leq x\leq y^2+1\}$$

e dal grafico rappresentativo del Dominio :



ne consegue la risposta esatta n° 4) .

4. Dall'equazione di una retta tangente ad una curva in un punto $P_0(\ x_0\ ,\ y_0\ )$:

$$f(\ x_0\ ,\ y_0\ )_x(x-x_0)+f(\ x_0\ ,\ y_0\ )_y(y-y_0)=0$$

si ha che :

$$\frac{\partial f(\ x\ ,\ y\ )}{\partial x}=2(1-k)x-3k \qquad , \qquad \frac{\partial f(\ x\ ,\ y\ )}{\partial x}=2y+2k$$

e poichè :

$$\frac{\partial f(0,1)}{\partial x}=-3k \qquad , \qquad \frac{\partial f(0,1)}{\partial x}=2+2k$$

si arriva all'equazione della retta tangente :

$$-3kx+(2+2k)(y-1)=0$$

e tra le condizioni assegnate per $k=2$ si ha :

$$-6x+6(y-1)=0 \quad \Rightarrow \quad y=x+1$$

ne consegue la risposta esatta n° 3) .

5. Applicando la formula di Moivre : $\sqrt[n]{z}=\sqrt[n]{\rho}\left(\cos\frac{\vartheta+2k\pi}{n}+i\operatorname{sen}\frac{\vartheta+2k\pi}{n}\right)$ per il numero complesso $z=-3i$, si ha :

$$\rho=\sqrt{a^2+b^2} \quad \Rightarrow \quad \rho=\sqrt{3^2}=3 \qquad , \vartheta=\operatorname{arctg}\frac{b}{a} \quad \Rightarrow \quad \vartheta=\operatorname{arctg}\frac{3}{0} \quad \Rightarrow \quad \vartheta=-\frac{\pi}{2}$$

per $k=0$

$$z_1=\sqrt[5]{3}\left(\cos\frac{-\frac{\pi}{2}}{5}+i\operatorname{sen}\frac{-\frac{\pi}{2}}{5}\right)=\sqrt[5]{3}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{10}\right)+i\operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{10}\right)\right)$$

per $k=1$

$$z_2=\sqrt[5]{3}\left(\cos\frac{-\frac{\pi}{2}+2\pi}{5}+i\operatorname{sen}\frac{-\frac{\pi}{2}+2\pi}{5}\right)=\sqrt[5]{3}\left(\cos\left(\frac{3}{10}\pi\right)+i\operatorname{sen}\left(\frac{3}{10}\pi\right)\right)$$

per $k=2$

$$z_2=\sqrt[5]{3}\left(\cos\frac{-\frac{\pi}{2}+4\pi}{5}+i\,\mathrm{sen}\,\frac{-\frac{\pi}{2}+4\pi}{5}\right)=\sqrt[5]{3}\left(\cos\left(\frac{7}{10}\pi\right)+i\,\mathrm{sen}\left(\frac{7}{10}\pi\right)\right)$$

per $k=3$

$$z_2=\sqrt[5]{3}\left(\cos\frac{-\frac{\pi}{2}+6\pi}{5}+i\,\mathrm{sen}\,\frac{-\frac{\pi}{2}+6\pi}{5}\right)=\sqrt[5]{3}\left(\cos\left(\frac{11}{10}\pi\right)+i\,\mathrm{sen}\left(\frac{11}{10}\pi\right)\right)$$

per $k=4$

$$z_2=\sqrt[5]{3}\left(\cos\frac{-\frac{\pi}{2}+8\pi}{5}+i\,\mathrm{sen}\,\frac{-\frac{\pi}{2}+8\pi}{5}\right)=\sqrt[5]{3}\left(\cos\left(\frac{3}{2}\pi\right)+i\,\mathrm{sen}\left(\frac{3}{2}\pi\right)\right)=-i\sqrt[5]{3}$$

ne consegue la risposta esatta n° 3) .

6. E' facilmente verificabile la continuità della funzione in $\Re^2\setminus\{(0\,,0\,)\}$. Ricordando ora la definizione di funzione continua in un punto $\lim_{P\to P_0} f(P)=f(P_0)$, il limite notevole $\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{arctg}\,x}{x}=1$, si ha :

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{\mathrm{arctg}(x+y^3)}{(|x|+|y|)^k}\cdot\frac{(x+y^3)}{(x+y^3)}=\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{(x+y^3)}{(|x|+|y|)^k}=\left(\frac{0}{0}\right)$$

in coordinate polari :

$$\lim_{\rho\to 0}\frac{(\rho\cos\vartheta+\rho^3\cos^3\vartheta)}{(|\rho\cos\vartheta|+|\rho\,\mathrm{sen}\,\vartheta|)^k}=\lim_{\rho\to 0}\frac{\rho(\cos\vartheta+\rho^2\cos^3\vartheta)}{\rho^k(|\cos\vartheta|+|\mathrm{sen}\,\vartheta|)^k}=\lim_{\rho\to 0}\frac{\rho^{1-k}(\cos\vartheta+\rho^2\cos^3\vartheta)}{(|\cos\vartheta|+|\mathrm{sen}\,\vartheta|)^k}=0$$

se e solo se $1-k>0 \quad\Rightarrow\quad k<1$.

ne consegue la risposta esatta n° 1) .

7) Risolvendo l'integrale :

$$F(t)=\int_{-1}^{t}\frac{e^{x}}{e^{2x}+1+2e^{x}}dx$$

$$F(t)=\int_{-1}^{t}\frac{e^{x}}{(e^{x}+1)^{2}}dx=\int_{-1}^{t}e^{x}\cdot(e^{x}+1)^{-2}dx=\left(-\frac{1}{e^{x}+1}\right)_{-1}^{t}=-\frac{1}{e^{t}+1}+\frac{1}{e^{-1}+1}=\frac{e^{t+1}-1}{(e^{t}+1)(e+1)}$$

da cui :

$$F(1)=\frac{e^{2}-1}{(e+1)^{2}}=\frac{e-1}{e+1} \qquad , \qquad 2F(0)=2\frac{e-1}{2(e+1)}$$

ne consegue la risposta esatta n° 2) .

8) Dalla condizione necessaria $\begin{cases} f(x,y)_x=0 \\ f(x,y)_y=0 \end{cases}$, si ha per la funzione $f(x,y)=e^{x\ln(-x)}+e^{y\ln y}$:

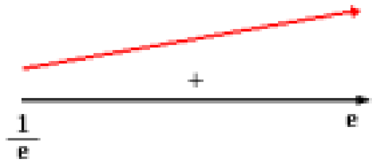
$$\begin{cases} (\ln(-x)+1)e^{x\ln(-x)}=0 \\ (\ln(y)+1)e^{y\ln y}=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \ln(-x)+1=0 \\ \ln(y)+1=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-\frac{1}{e} \\ y=\frac{1}{e} \end{cases} \Rightarrow P\left(-\frac{1}{e},\frac{1}{e}\right) \text{ punto critico.}$$

Il valore della funzione in tale punto : $f\left(-\frac{1}{e},\frac{1}{e}\right)=e^{\frac{1}{e}}+e^{-\frac{1}{e}}$

Per i punti di frontiera :

LATO AB : $\boxed{x=-\frac{1}{e}}$ $\rightarrow$ $f(y)=e^{\frac{1}{e}}+e^{y\ln y}$

$$f'(y)=(\ln y+1)e^{y\ln y} \quad\Rightarrow\quad f'(y)>0 \quad\Rightarrow\quad (\ln y+1)>0 \quad\Rightarrow\quad y>\frac{1}{e}$$

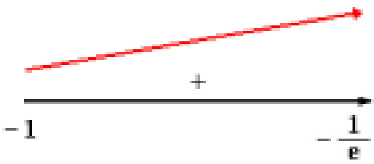


Il valore nei punti A e B :

$$f(A)=f\left(-\frac{1}{e},\frac{1}{e}\right)=e^{\frac{1}{e}}+e^{-\frac{1}{e}} \qquad , \qquad f(B)=f\left(-\frac{1}{e},e\right)=e^{\frac{1}{e}}+e^{e}$$

LATO BC : $\boxed{y=e}$ $\quad\rightarrow\quad f(x)=e^{x\ln(-x)}+e^{e}$

$$f'(x)=(\ln(-x)+1)e^{x\ln(-x)} \quad\Rightarrow\quad f'(x)>0 \quad\Rightarrow\quad (\ln(-x)+1)>0 \quad\Rightarrow\quad x<-\frac{1}{e}$$

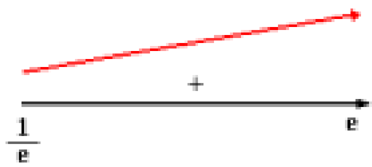


Il valore nel punto C :

$$f(C)=f(-1,e)=1+e^{e}$$

LATO CD : $\boxed{x=-1}$ $\quad\rightarrow\quad f(y)=e^{y\ln y}$

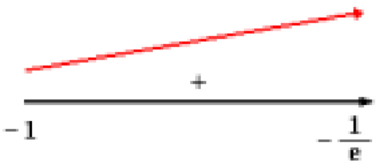
$$f'(y)=(\ln y+1)e^{y\ln y} \quad\Rightarrow\quad f'(y)>0 \quad\Rightarrow\quad (\ln y+1)>0 \quad\Rightarrow\quad y>\frac{1}{e}$$



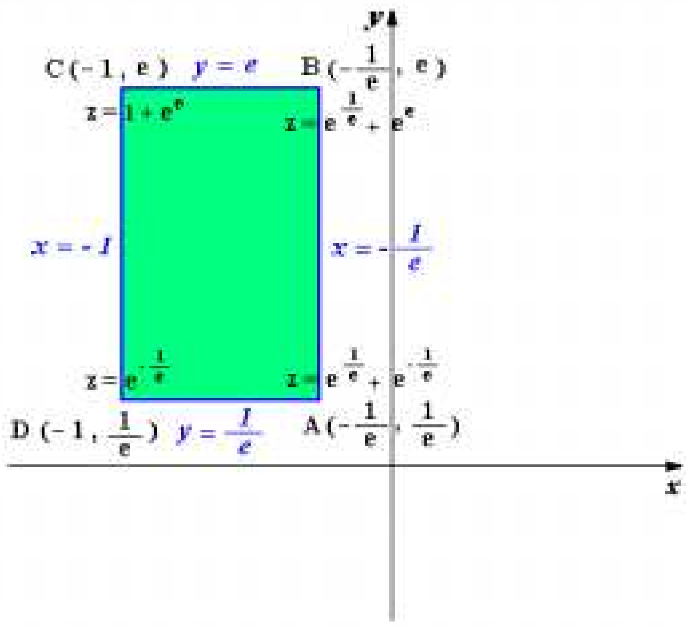
Il valore nel punto D : $f(D)=f\left(-1,\frac{1}{e}\right)=e^{-\frac{1}{e}}$

LATO DA : $\boxed{y = \frac{1}{e}}$ $\rightarrow$ $f(x) = e^{x\ln(-x)} + e^{-\frac{1}{e}}$

$f'(x) = (\ln(-x)+1)e^{x\ln(-x)}$ $\Rightarrow$ $f'(x) > 0$ $\Rightarrow$ $(\ln(-x)+1) > 0$ $\Rightarrow$ $x < -\frac{1}{e}$



E quindi riassumendo :



ne consegue la risposta esatta n° 1) .

9) Dalle relazioni : $\begin{cases} U(x,y)_x = e^x \cos y - x^2 \\ U(x,y)_y = y - e^x \operatorname{sen} y \end{cases}$ si ha :

$$U(x,y) = \int \left(e^x \cos y - x^2\right) dx + c(y)$$

$$U(x,y) = e^x \cos y - \frac{x^3}{3} + c(y)$$

e ancora poiché : $U(x,y)_y = y - e^x \operatorname{sen} y$ si ha :

$$-e^x \operatorname{sen} y + c'(y) = y - e^x \operatorname{sen} y$$

$$c'(y) = y$$

$$c(y) = \frac{y^2}{2} + k$$

e quindi la funzione potenziale : $U(x,y) = e^x \cos y - \frac{x^3}{3} + \frac{y^2}{2} + 1$

dopo che si è posto $k = 1$ tale che : $U(0,0) = 2$

ne consegue la risposta esatta n° 3) .

Riassumendo il quadro generale del questionario :

domanda :	1	2	3	4	5	6	7	8	9
risposta :	4	1	4	3	3	1	2	1	3