Trovare l'integrale generale dell'equazione differenziale .

$$y''-4y'+4y = xe^x$$

Dall'equazione caratteristica associata :

$$\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad \left| \begin{array}{l} \lambda_1 = 2 \\ \lambda_2 = 2 \end{array} \right.$$

per cui un integrale generale dell'equazione risulta :

$$y = c_1 e^{2x} + c_2 x e^{2x} + \varphi(x)$$

con $\varphi(x) = (ax+b)e^x$

Per le relative derivate :

$$\varphi'(x) = ae^x + (ax+b)e^x$$

$$\varphi''(x) = ae^x + ae^x + (ax+b)e^x$$

e sostituendo nell'equazione di partenza :

$$2ae^x + (ax+b)e^x - 4\left(ae^x + axe^x + be^x\right) + 4(ax+b)e^x = xe^x$$

$$(ax - 2a + b)e^x = xe^x$$

dal sistema relativo si ha : $\begin{cases} a = 1 \\ -2a + b = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 2 \end{cases}$

con la soluzione particolare dell'equazione :

$$\boxed{y = c_1 e^{2x} + c_2 x e^{2x} + (x+2)e^x}$$

Volendo verificare il risultato ottenuto :

$$y' = 2c_1 e^{2x} + c_2 e^{2x} + 2c_2 x e^{2x} + e^x + (x+2)e^x$$

$$y'' = 4c_1 e^{2x} + 2c_2 e^{2x} + 2c_2 e^{2x} + 4c_2 x e^{2x} + e^x + e^x + (x+2)e^x$$

da cui sostituendo nell'equazione iniziale :

$$4c_1 e^{2x} - 4c_2 e^{2x} + 4c_2 x e^{2x} + 4e^x + xe^x - 4\left(2c_1 e^{2x} + c_2 e^{2x} + 2c_2 x e^{2x} + 3e^x + xe^x\right) +$$

$$+4\left(c_1 e^{2x} + c_2 x e^{2x} + xe^x + 2e^x\right) = xe^x$$

$$xe^x = xe^x$$

$$0 = 0$$

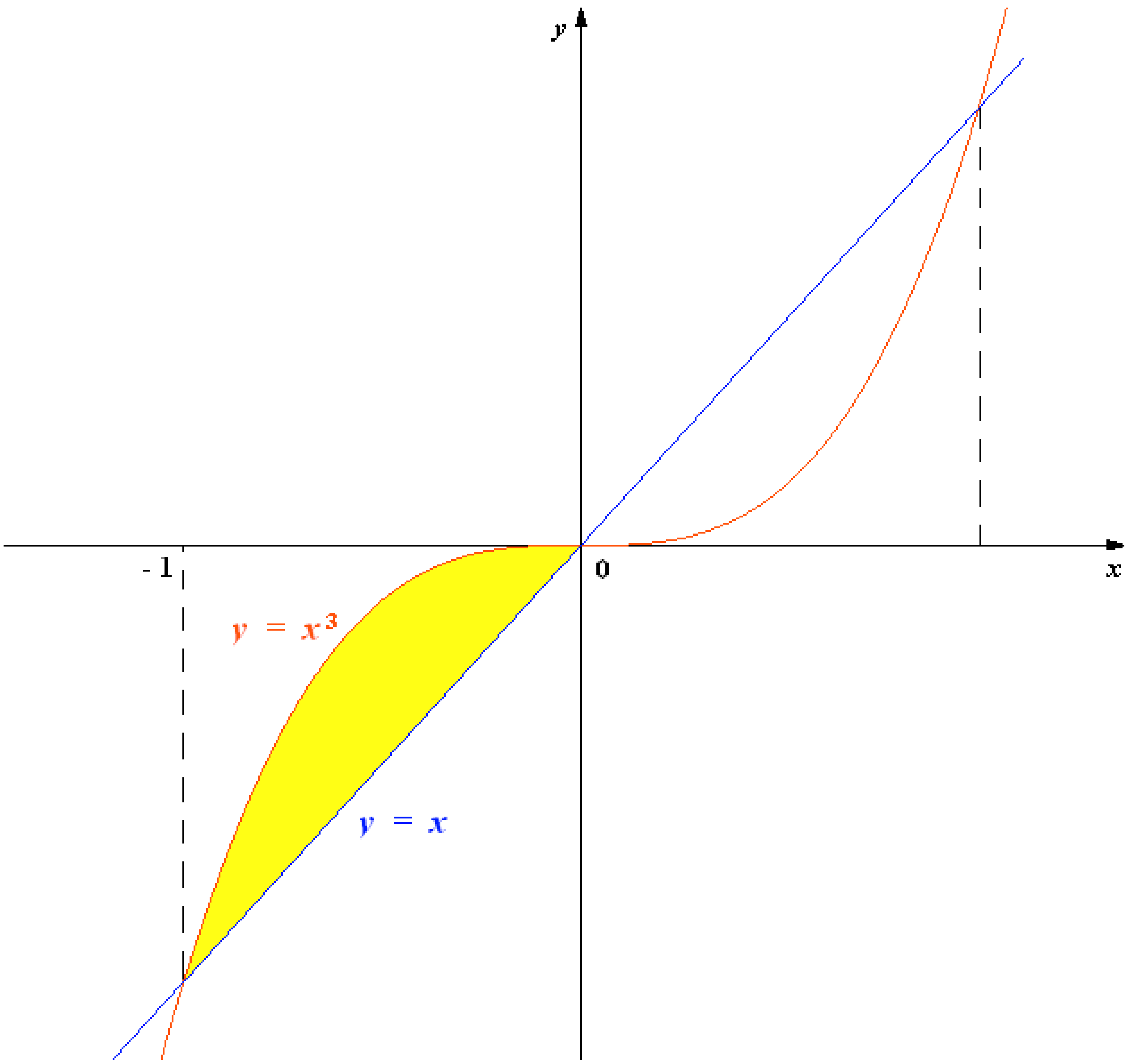
e ciò verifica la bontà del risultato.

Calcolare

$$\iint_D (2x+y)\,dxdy$$

dove $D = \left\{ (x,y) \in \Re^2 : \ y \geq x \quad , \quad y \leq x^3 \ \right\}$

Dal grafico del Dominio :



Considerando il dominio normale a x si ha :

$$\iint_D (2x+y)dxdy =$$

$$\int_{-1}^{0} dx \int_{x}^{x^3} (2x+y)dy = \int_{-1}^{0} dx \left[2xy + \frac{y^2}{2}\right]_{x}^{x^3} = \int_{-1}^{0} \left[\left(2x^4 + \frac{x^6}{2}\right) - \left(2x^2 + \frac{x^2}{2}\right)\right] dx = \int_{-1}^{0} \left(\frac{x^6}{2} + 2x^4 - \frac{5}{2}x^2\right) dx =$$

$$= \left(\frac{x^7}{14} + \frac{2}{5}x^5 - \frac{5}{6}x^3\right)_{-1}^{0} = -\left(-\frac{1}{14} - \frac{2}{5} + \frac{5}{6}\right) = -\left(\frac{-15-84+175}{210}\right) = -\frac{38}{105}$$

Individuare i punti di massimo e minimo relativo della funzione

$$f(x,y) = xy^2 + xy + 1$$

Dalla condizione necessaria per i massimi e i minimi : $\begin{cases} f(x,y)_x = 0 \\ f(x,y)_y = 0 \end{cases}$

$$\begin{cases} y^2 + y = 0 \\ 2xy + x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y(y+1) = 0 \\ x(2y+1) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x = 0 \end{cases} \Rightarrow P_1(\,0\,,0\,)\quad , \quad \begin{cases} y = -1 \\ x = 0 \end{cases} \Rightarrow P_2(\,0\,,-1\,)$$

Punti critici.

Dalla condizione di sufficienza :

$$H(x,y) = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} f_{xx} = 0 & , & f_{yy} = 2x \\ f_{xy} = 2y+1 & , & f_{yx} = 2y+1 \end{matrix} \quad \Rightarrow \quad H(x,y) = \begin{pmatrix} 0 & 2y+1 \\ 2y+1 & 2x \end{pmatrix}$$

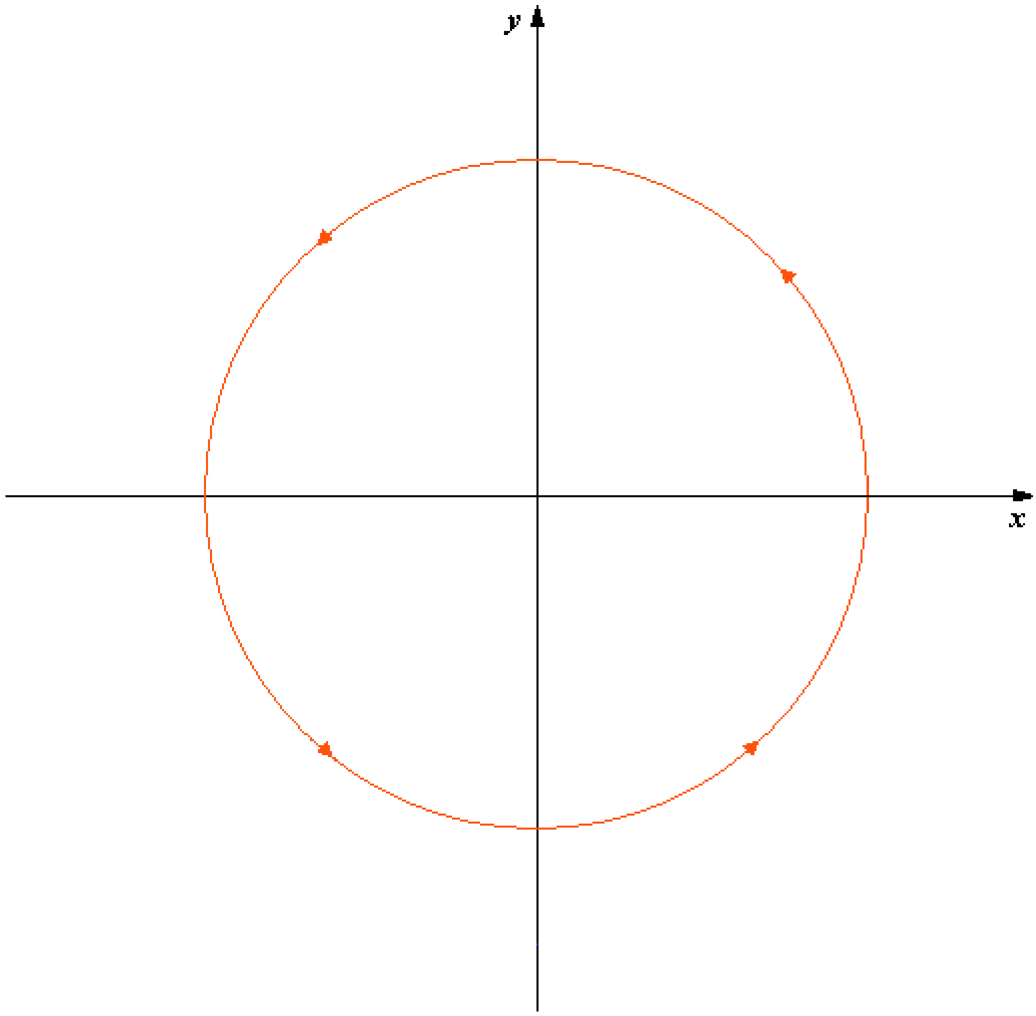
il calcolo dell'Hessiano , $|\,H(x,y)\,| = -(2y+1)^2$, nei punti P_1 e P_2 risulta **negativo** determinando in tali punti dei **punti di sella** .

Calcolare l'integrale curvilineo del campo vettoriale $F(x,y)=(x^2,y^2)$ lungo la curva di equazioni parametriche $\begin{cases} x=\cos t \\ y=\operatorname{sen} t \end{cases}$ $t\in[\,0\,,2\pi\,]$. Stabilire se F è conservativo e in caso affermativo trovarne una funzione potenziale .

$$\oint_\gamma x^2dx+y^2dy=$$

$$\int_0^{2\pi}\left[\cos^2 t(-\operatorname{sen} t)+\operatorname{sen}^2 t(\cos t)\right]dt \quad = \quad -\int_0^{2\pi}\operatorname{sen} t\cos^2 t\,dt \quad + \quad \int_0^{2\pi}\operatorname{sen}^2 t\cos t\,dt \quad =$$

$$\int_0^{2\pi}-\operatorname{sen} t\cos^2 t\,dt \quad + \quad \int_0^{2\pi}\operatorname{sen}^2 t\cos t\,dt \quad = \quad \left[\frac{\cos^3 t}{3}\right]_0^{2\pi}+\left[\frac{\operatorname{sen}^3 t}{3}\right]_0^{2\pi}=0$$



Il campo vettoriale $F(x,y)=\left(x^2,y^2\right)$ è conservativo se : $\frac{\partial F_1(x,y)}{\partial y}=\frac{\partial F_2(x,y)}{\partial x}$

$$0=0$$

e quindi $\exists$ una funzione potenziale $U(x,y)$.

Per determinare una funzione potenziale , ricorderemo che :

$$\begin{aligned} &\frac{\partial U(x,y)}{\partial x}=x^2 \\ &\frac{\partial U(x,y)}{\partial y}=y^2 \end{aligned} \qquad 1)$$

Dalla prima delle 1) si ha :

$$U(x,y)=\int x^2dx+c(y)$$

$$U(x,y)=\frac{x^3}{3}+c(y)$$

e per la seconda delle 1) :

$$\frac{\partial U(x,y)}{\partial y}=y^2$$

$$c'(y)=y^2 \quad \Rightarrow \quad c(y)=\frac{y^3}{3}$$

e quindi :

$$U(x,y)=\frac{x^3}{3}+\frac{y^3}{3}$$