Stabilire per quale valore di *k* la matrice

$$A = \begin{pmatrix} k-5 & 0 & 4k \\ 0 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & 9 \end{pmatrix}$$

possiede due autovalori uguali a 2 e verificare se , per tale valore , A è diagonalizzabile .

Svolgimento :

Calcolando gli autovalori : $|\ A - \lambda I\ | = 0$

$$|\ A - \lambda I\ | = \begin{vmatrix} k-5-\lambda & 0 & 4k \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ 4 & 0 & 9-\lambda \end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad (2-\lambda)[(k-5-\lambda)(9-\lambda)-16k] = 0$$

$(2-\lambda)[\lambda^2 - (4+k)\lambda - 7k - 45] = 0$ e sostituendo $\lambda = 2$ si ottiene :

$$-9k - 49 = 0 \quad \Rightarrow \quad k = -\frac{49}{9}$$

Per $k = -\frac{49}{9}$ $\quad \lambda_1 = \lambda_2 = 2$ **(molteplicità algebrica 2)**

Si ha sostituendo in $|\ A - \lambda I\ | = 0$:

$$(A - \lambda I) = \begin{pmatrix} -\frac{112}{9} & 0 & -\frac{196}{9} \\ 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 7 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad r(A - \lambda I) = 1 \qquad DimKer(A - \lambda I) = 1$$

da cui : DimR^3(3) – DimKer(1) = DimAutospazio (2) e poiché la molteplicità geometrica è pari a quella algebrica , la A è diagonalizzabile .