Data la matrice $A = \begin{pmatrix} -1 & a & 0 \\ 1 & b & 1 \\ b & a & -1 \end{pmatrix}$

(i) **si trovi la caratteristica di A al variare di a , $b \in \Re$;**

(ii) **si trovi a , $b \in \Re$ in modo che la matrice A ammetta il vettore v (1 , 2 , 1) come autovettore . Per tali valori di a , b se ne discuta poi la diagonalizzabilità .**

(i) Ricordando la definizione di caratteristica , si ha che :

$$\begin{vmatrix} -1 & a & 0 \\ 1 & b & 1 \\ b & a & -1 \end{vmatrix} = -1\begin{vmatrix} -1 & a \\ b & a \end{vmatrix} -1\begin{vmatrix} -1 & a \\ 1 & b \end{vmatrix} = \Rightarrow a + ab + b + a = 2a + ab + b$$

E quindi :

Se $2a + ab + b \neq 0 \Rightarrow a \neq -\dfrac{b}{2+b}$ la **caratteristica** di A è 3 .

Se $2a + ab + b = 0 \Rightarrow a = -\dfrac{b}{2+b}$ sostituendo in A si ha :

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -\dfrac{b}{2+b} & 0 \\ 1 & b & 1 \\ b & -\dfrac{b}{2+b} & -1 \end{pmatrix}$$ e scegliendo un minore di ordine 2 , ad es. $A_1 = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$,

da cui la **caratteristica** di A uguale a 2 .

(ii) dalla definizione di autovettore $AX = \lambda X$, si ha che :

$$\begin{pmatrix} -1 & a & 0 \\ 1 & b & 1 \\ b & a & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} -1 & a & 0 \\ 1 & b & 1 \\ b & a & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} -1+2a = \lambda \\ 1+2b+1 = 2\lambda \\ b+2a-1 = \lambda \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lambda = -1+2a \\ 1+2b+1 = 2(-1+2a) \\ b+2a-1 = -1+2a \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} a = 1 \\ b = 0 \end{cases}$$

per questi valori di a , b sostituiti in A , applicando la $|A - \lambda I| = 0$ si ha :

$$\begin{vmatrix} -1-\lambda & 1 & 0 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 0 & 1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad (1+\lambda)(-\lambda^2 - \lambda + 2) = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{vmatrix} \lambda_1 = -1 \\ \lambda_2 = 1 \\ \lambda_3 = -2 \end{vmatrix}$$

Dal momento che la matrice assume autovalori reali e distinti , è **diagonalizzabile** .