Scrivere l' equazione della conica , luogo geometrico dei punti del piano per (O ; x , y) equidistanti dal punto F (0 , 2) e dalla retta bisettrice del primo e del terzo quadrante . Scriverne anche l'equazione nella forma canonica e , nel piano (O ; x , y) , le equazioni degli assi di simmetria .

Risulta evidente dal testo che tale tipo di conica risponda per definizione a quella di una parabola .

Impostando quindi la definizione : $\overline{PF} = d(\overline{\mathrm{Pr}})$ con $r : x - y = 0$, $P(x , y) \in Conica$

$$\sqrt{x^2 + (y-2)^2} = \frac{|x-y|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} \qquad \Rightarrow \qquad x^2 + y^2 - 4y + 4 = \frac{x^2 - 2xy + y^2}{2}$$

da cui : $\boxed{x^2 + 2xy + y^2 - 8y + 8 = 0}$ che esprime in (O ; x , y) l'equazione della conica

Per esprimere la conica in forma canonica si ha :

$$|A - \lambda I| = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \left| \begin{array}{l} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 2 \end{array} \right.$$

Con $\lambda_1 = 0$ il sistema generato da $AX = \lambda_1 X$ diventa :

$\{ x + y = 0$ autospazio parallelo **all'asse di simmetria** della conica in (O ; x , y)

E' evidente che con $\lambda_2 = 2$ il sistema generato da $AX = \lambda_1 X$ diventa :

$\{ -x + y = 0$

autospazio che esprime **la direttrice** (ortogonale all'asse di simmetria) della conica in (O ; x , y) .

l'equazione dell'asse di simmetria della conica in (O ; x , y) è data da : $\boxed{x + y - 2 = 0}$

per l'equazione in forma canonica , applicando le formule di rotazione alla equazione della conica , con $\vartheta = \dfrac{\pi}{4}$ si ha :

$$\begin{cases} x = X\cos\vartheta - Y \operatorname{sen}\vartheta \\ y = X \operatorname{sen}\vartheta + Y\cos\vartheta \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} X = \dfrac{x}{\sqrt{2}} - \dfrac{y}{\sqrt{2}} \\ Y = \dfrac{x}{\sqrt{2}} + \dfrac{y}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

$$\left(\frac{X}{\sqrt{2}} - \frac{Y}{\sqrt{2}}\right)^2 + 2\left(\frac{X}{\sqrt{2}} - \frac{Y}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{X}{\sqrt{2}} + \frac{Y}{\sqrt{2}}\right) + \left(\frac{X}{\sqrt{2}} + \frac{Y}{\sqrt{2}}\right)^2 - 8\left(\frac{X}{\sqrt{2}} + \frac{Y}{\sqrt{2}}\right) + 8 = 0$$

$$\boxed{Y = \frac{\sqrt{2}}{4}X^2 - X + \sqrt{2}}$$ Equazione canonica della conica (parabola)