a) Determinare l'equazione cartesiana del piano π passante per i punti $P_0 = (1, 0, 2)$, $P_1 = (1, 1, 0)$ e $P_2 = (2, 1, 1)$.

b) Determinare le equazioni parametriche della retta r passante per $(0, 0, 0)$ e ortogonale al piano π trovato nel punto a) .

Svolgimento :

a) Dal punto generico $P(x, y, z) \in \Re^3$ costruiamo i vettori :

$$P_0P_1 = P_1 - P_0 = (0, 1, -2) \quad , \quad P_0P_2 = P_2 - P_0 = (1, 1, -1) \quad , \quad P_0P = P - P_0 = (x-1, y, z-2)$$

imponendo la complanarità dei tre vettori si ottiene l'equazione del piano cercato .

Ricordando che la condizione di complanarità di tre vettori è data dall'annullamento del loro prodotto misto si ha che :

vedi lez. 2 (spazi vettoriali)

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \\ x-1 & y & z-2 \end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad -2y - x + 1 + 2x - 2 + 2 - z = 0 \quad \Rightarrow \quad x - 2y - z + 1 = 0$$

b) Dalle equazioni parametriche della retta : $r = \begin{cases} x = x_1 + (x_2 - x_1) \cdot t \\ y = y_1 + (y_2 - y_1) \cdot t \\ z = z_1 + (z_2 - z_1) \cdot t \end{cases}$

dato il punto $(0, 0, 0)$ e ricordando la condizione di perpendicolarità di una retta ad un piano :

$$r \perp \pi \quad \Rightarrow \quad \vec{v_r} \, || \, \vec{v_\pi} \quad \Rightarrow \quad \vec{v_r} = k \cdot \vec{v_\pi} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} l = k \cdot a \\ m = k \cdot b \\ n = k \cdot c \end{cases}$$

vedi lez. 3 (geometria lineare)

con $\vec{v_\pi} = (1, -2, -1) \perp \pi$. Posto un valore arbitrario per k : $k = 1$ si ha : $\vec{v_r} = (1, -2, -1) \, || \, r$

e quindi l'equazione della retta : $r = \begin{cases} x = t \\ y = -2t \\ z = -t \end{cases}$.