In un riferimento cartesiano ortogonale (*Oxyz*) si considerino le rette r_1 , r_2 di equazioni rispettivamente $\begin{cases} x-z+4=0 \\ y+11=0 \end{cases}$, $\begin{cases} 2x-y+2z=0 \\ ay-z+2=0 \end{cases}$ dove *a* è un parametro reale . Trovare al variare di *a* la mutua posizione delle rette .

Svolgimento :

Dal sistema delle due rette :

$$\begin{cases} x-z=-4 \\ y=-11 \\ 2x-y+2z=0 \\ ay-z=-2 \end{cases}$$

risolvendo rispetto a x , y , z si ha :

$$\begin{cases} x-z=-4 \\ y=-11 \\ 2x-y+2z=0 \\ ay-z=-2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-z=-4 \\ y=-11 \\ 2x+11+2z=0 \\ -11a-z=-2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=z-4 \\ y=-11 \\ 2z-8+11+2z=0 \\ -11a-z=-2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-\dfrac{19}{4} \\ y=-11 \\ z=-\dfrac{3}{4} \\ a=\dfrac{1}{4} \end{cases}$$

o allo stesso modo portando la matrice completa a forma ridotta :

$$A_C=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & -11 \\ 2 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & a & -1 & -2 \end{pmatrix} \underset{3^\wedge_r \to 3^\wedge_r - 2\cdot 1^\wedge_r}{\cong} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & -11 \\ 0 & -1 & 4 & 8 \\ 0 & a & -1 & -2 \end{pmatrix} \underset{\substack{3^\wedge_r \to 3^\wedge_r + 2^\wedge_r \\ 4^\wedge_r \to 4^\wedge_r - a\cdot 2^\wedge_r}}{\cong} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & -11 \\ 0 & 0 & 4 & -3 \\ 0 & 0 & -1 & -2+11a \end{pmatrix} \underset{4^\wedge_r \to 4\cdot 4^\wedge_r + 3^\wedge_r}{\cong} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & -11 \\ 0 & 0 & 4 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -11+44a \end{pmatrix}$$

e quindi :

1) se $a=\dfrac{1}{4}$ le due rette r_1 e r_2 sono incidenti poichè $r(A_I)=r(A_C)=3$

2) se $a\neq\dfrac{1}{4}$ le due rette r_1 e r_2 sono sghembe poichè $r(A_I)=3 \quad \neq \quad r(A_C)=4$.