Risolvere al variare del parametro reale *a* il sistema lineare :

$$\begin{cases} 2x+(a+1)y+z=1 \\ 3x+(a+3)y+z=0 \\ x-y+z=2 \\ (a+1)y+y+z=0 \end{cases}$$

Svolgimento :

Calcoliamo il determinante della matrice completa del sistema :

$$A_C = \begin{vmatrix} 2 & (a+1) & 1 & 1 \\ 3 & (a+3) & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & (a+1) & 1 & 0 \end{vmatrix} \underset{3^\wedge_r \to 3^\wedge_r - 2\cdot 1^\wedge_r}{\approx} \begin{vmatrix} 2 & (a+1) & 1 & 1 \\ 3 & (a+3) & 1 & 0 \\ -3 & -3-2a & -1 & 0 \\ 1 & (a+1) & 1 & 0 \end{vmatrix} = -1\begin{vmatrix} 3 & a+3 & 1 \\ -3 & -3-2a & -1 \\ 1 & a+1 & 1 \end{vmatrix} = 2a$$

Per le operazioni eseguite vedere lez. 2 (matrici)

Discussione :

a) Se $2a \neq 0 \quad \Rightarrow \quad a \neq 0$ il sistema non ammette soluzioni , poiché $r(A_C)=4 \quad \neq \quad r(A_I) \leq 3$.

b) Se $a=0$ il sistema diventa :

$$\begin{cases} 2x+y+z=1 \\ 3x+3y+z=0 \\ x-y+z=2 \\ x+y+z=0 \end{cases}$$

e portando la matrice completa a forma ridotta :

$$A_C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cong \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cong \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 6 & -2 & -6 \\ 0 & 3 & -1 & -3 \\ 0 & 2 & 0 & -2 \end{pmatrix} \cong \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 6 & -2 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \cong \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 6 & -2 & -6 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$3\wedge_r \leftrightarrow 1\wedge_r$

$2\wedge_r \to 2\wedge_r - 3\cdot 1\wedge_r$
$3\wedge_r \to 3\wedge_r - 2\cdot 1\wedge_r$
$4\wedge_r \to 4\wedge_r - 1\wedge_r$

$3\wedge_r \to 2\cdot 3\wedge_r - 2\wedge_r$
$4\wedge_r \to 3\cdot 4\wedge_r - 2\wedge_r$

$4\wedge_r \leftrightarrow 3\wedge_r$

il sistema equivalente risulta quindi :

$$\begin{cases} x - y + z = 2 \\ \quad 6y - 2z = -6 \\ \qquad\quad + 2z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = -1 \\ z = 0 \end{cases}$$ il sistema ammette una sola soluzione .