Risolvere al variare del parametro reale h il sistema lineare :

$$\begin{cases} (h+1)x+2y+z=1 \\ (3+h)x+3y+z=0 \\ -x+y+z=2 \\ (h+1)x+y+z=0 \end{cases}$$

Svolgimento :

Calcoliamo il determinante della matrice completa del sistema :

$$A_C = \begin{vmatrix} (h+1) & 2 & 1 & 1 \\ (3+h) & 3 & 1 & 0 \\ -1 & +1 & +1 & 2 \\ (h+1) & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} \approx \underset{3\hat{}_r \to 3\hat{}_r - 2\cdot 1\hat{}_r}{\begin{vmatrix} (h+1) & 2 & 1 & 1 \\ (3+h) & 3 & 1 & 0 \\ -3-2h & -3 & -1 & 0 \\ (h+1) & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}} = -1\begin{vmatrix} 3+h & 3 & 1 \\ -3-2h & -3 & -1 \\ h+1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -2h$$

Per le operazioni eseguite vedere lez. 2 (matrici)

Discussione :

a) Se $-2h \neq 0 \quad \Rightarrow \quad h \neq 0$ il sistema non ammette soluzioni , poiché $r(A_C)=4 \quad \neq \quad r(A_I) \leq 3$.

b) Se $h=0$ il sistema diventa :

$$\begin{cases} x+2y+z=1 \\ 3x+3y+z=0 \\ -x+y+z=2 \\ x+y+z=0 \end{cases}$$

e portando la matrice completa a forma ridotta :

$$A_C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & -2 & -3 \\ 0 & 3 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{lll} 2^{\wedge}{}_r \to 2^{\wedge}{}_r - 3 \cdot 1^{\wedge}{}_r & 3^{\wedge}{}_r \to 3^{\wedge}{}_r + 2^{\wedge}{}_r & 4^{\wedge}{}_r \leftrightarrow 3^{\wedge}{}_r \\ 3^{\wedge}{}_r \to 3^{\wedge}{}_r + 1^{\wedge}{}_r & 4^{\wedge}{}_r \to 3 \cdot 4^{\wedge}{}_r - 2^{\wedge}{}_r & \\ 4^{\wedge}{}_r \to 4^{\wedge}{}_r - 1^{\wedge}{}_r & & \end{array}$$

il sistema equivalente risulta quindi :

$$\begin{cases} x + 2y + z = 1 \\ \quad -3y - 2z = -3 \\ \qquad\quad +2z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \\ z = 0 \end{cases}$$ il sistema ammette una sola soluzione .