2^ Lezione

- Il limite .
- Limiti di forma immediata .
- Limiti di forma indeterminata .
- Asintoti
- Allegato Esercizi .

IL LIMITE

Per la definizione stessa di funzione, per ogni valore reale della variabile indipendente(x) , vi è sempre uno ed un solo corrispondente valore reale della variabile dipendente (y). Quindi saremo sempre in grado di valutare il reale valore della funzione per tutti quei valori reali che assume la variabile indipendente (x) . Poiché abbiamo ricordato che intercorre una corrispondenza tra ogni valore reale (x) ed ogni punto sull'asse corrispondente delle ascisse , saremo sempre in grado di valutare il valore che assume una funzione per ogni punto nel quale essa sia definita.

E' del tutto evidente che ci si possa chiedere quale sia il comportamento che assume una funzione in corrispondenza di punti in cui non sia definita ; ed è per tale motivo che introduciamo il **concetto di limite .**

Il problema quindi sta nel valutare che tipo di comportamento assume la funzione , man mano che alla variabile indipendente x diamo dei valori molto prossimi al valore per il quale la funzione stessa non è definita. A tale proposito faremo un esempio chiarificatore.

Es. $$\boxed{y = \frac{1}{x-2}}$$

Campo di esistenza : $\forall x \in \Re / (x = 2)$

Ecco quindi che diventa interessante valutare che cosa succede per la funzione y quando la variabile x assume dei valori molto prossimi a 2 , sia a partire da sinistra che a partire da destra.
A tale proposito formuleremo una tabella nella quale , valutata la x nella colonna di sinistra , assegneremo dei valori arbitrari che si avvicinano via via al valore 2 (e da sinistra e da destra) e corrispondentemente sostituendo tali valori nella funzione calcoleremo i valori di y (valutata nella colonna di destra) .

x	y
1,8	-5
1,9	-10
1,94	-16,666
1,99	-100
1,995	-200
1,999	-1000
1,9999	-10000
……..	……..

x	y
2,2	+5
2,1	+10
2,05	+20
2,01	+100
2,001	+1000
2,0001	+10000
2,00001	+100000
……..	……..

Possiamo quindi verificare che quanto più ci si avvicina al valore $x = 2$ da sinistra (1^ tabella), tanto più la funzione assume valori negativi infinitamente piccoli , e che per tale ragione , rappresentati con il simbolo $(-\infty)$; allo stesso modo per la 2^ tabella i valori che la funzione assume al tendere di x a 2^+ (è così che indicheremo i valori che si avvicinano a 2 da destra) sono valori positivi infinitamente grandi e rappresentabili quindi con $(+\infty)$.

Vi sono altresì altri valori sull'asse delle ascisse dove la funzione non è valutabile , e precisamente i valori corrispondenti agli estremi di tale asse che indicheremo con i simboli $(-\infty),(+\infty)$.

Quindi il numero dei limiti da calcolare per una funzione sarà stabilito dagli estremi del Campo di esistenza $(-\infty ; +\infty)$ e dai punti esclusi dal C.E. stesso.

Tornando quindi all'esempio precedente , useremo la seguente scrittura:

$$\lim_{x \to -\infty} \left(\frac{1}{x-2}\right) = \ldots. \quad \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{1}{x-2}\right) = \ldots. \quad \lim_{x \to 2^-} \left(\frac{1}{x-2}\right) = \ldots. \quad \lim_{x \to 2^+} \left(\frac{1}{x-2}\right) = \ldots.$$

Così come abbiamo formulato una tabella per i valori di x molto prossimi a 2 , così ora possiamo formulare una tabella assegnando a x dei valori che si allontanano sempre più verso valori negativi infinitamente piccoli e verso valori positivi infinitamente grandi.

x	y
-100	-0,01020
-1000	-0,001002
-10000	-0,00010002
-100000	-0,0000100002
-1000000	-0,000001000002
-10000000	-0,00000010000002
………	………

x	y
+100	+0,01020
+1000	+0,001002
+10000	+0,00010002
+100000	+0,0000100002
+1000000	+0,000001000002
+10000000	+0,00000010000002
………	………

Ci rendiamo conto del fatto che più la variabile x assume valori elevati (sia negativi che positivi), più la variabile y (che rappresenta la funzione) assume dei valori molto vicini allo zero (leggermente negativi o leggermente positivi).

Tali indicazioni derivantici dalle tabelle formulate ci indicano il comportamento della funzione per valori di x non definiti come valori reali.

Usando una terminologia non del tutto corretta , diremo che l'operazione di studio del limite ci permette di determinare dei **punti astratti** (non appartenenti al campo reale, e quindi non definiti) che fungono da punti di collegamento per il grafico della funzione .

Ritornando all'esempio sopra riportato:

$$\boxed{y = \frac{1}{x-2}}$$

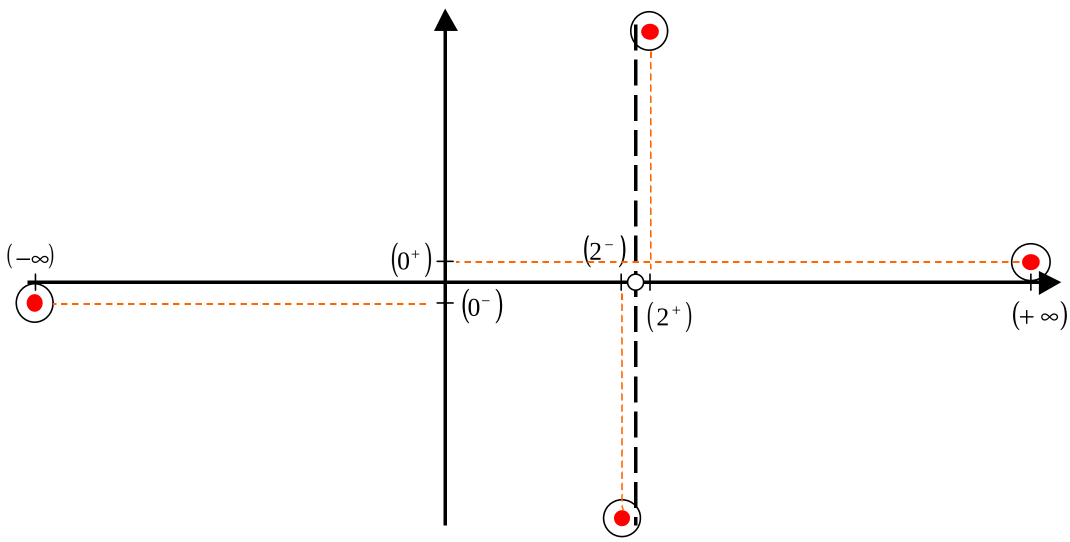
Campo di esistenza : $\forall x \in \Re / (x = 2)$

$$\lim_{x \to -\infty} \left(\frac{1}{x-2} \right) = 0 \quad ; \quad \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{1}{x-2} \right) = 0 \quad ; \quad \lim_{x \to 2^-} \left(\frac{1}{x-2} \right) = -\infty \quad ; \quad \lim_{x \to 2^+} \left(\frac{1}{x-2} \right) = +\infty$$

Quindi con tali risultati intenderemo , in modo del tutto astratto , di aver determinato quattro punti di coordinate rispettivamente :

$P(-\infty\,;0^-)$ $\qquad$ $P_1(+\infty\,;0^+)$ $\qquad$ $P_2(2^-\,;-\infty)$ $\qquad$ $P_3(2^+\,;+\infty)$

che andremo a rappresentare graficamente :



Da notare quindi che i punti astratti che abbiamo rappresentato sul grafico fungono da collegamento tra i diversi rami della funzione .
Dopo aver quindi spiegato il significato pratico di ciò che vuol dire studiare il limite di una funzione, tratteremo ora la parte del calcolo vero e proprio del limite di una funzione.

Distingueremo quindi i limiti in due tipologie ben differenziate :

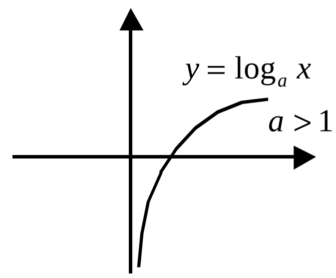
LIMITI DI FORMA IMMEDIATA

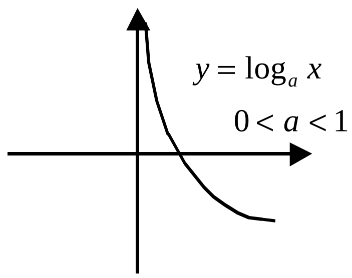
I limiti di **forma immediata** sono tutti quei limiti per i quali con la semplice sostituzione si ottiene subito il risultato. A tale proposito , prima dei relativi esempi , daremo la seguente tabella riassuntiva di tutti i casi di limiti di forma immediata.

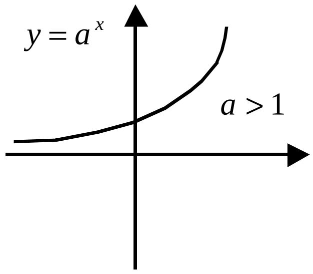
$\frac{0^+}{+n}=0^+$	$\frac{0^+}{-n}=0^-$	$\frac{0^-}{+n}=0^-$	$\frac{0^-}{-n}=0^+$
$\frac{0^+}{+\infty}=0^+$	$\frac{0^+}{-\infty}=0^-$	$\frac{0^-}{+\infty}=0^-$	$\frac{0^-}{-\infty}=0^+$
$\frac{+n}{0^+}=+\infty$	$\frac{+n}{0^-}=-\infty$	$\frac{-n}{0^+}=-\infty$	$\frac{-n}{0^-}=+\infty$
$\frac{+n}{+\infty}=0^+$	$\frac{+n}{-\infty}=0^-$	$\frac{-n}{+\infty}=0^-$	$\frac{-n}{-\infty}=0^+$
$\frac{+\infty}{0^+}=+\infty$	$\frac{+\infty}{0^-}=-\infty$	$\frac{-\infty}{0^+}=-\infty$	$\frac{-\infty}{0^-}=+\infty$
$\frac{+\infty}{+n}=+\infty$	$\frac{+\infty}{-n}=-\infty$	$\frac{-\infty}{+n}=-\infty$	$\frac{-\infty}{-n}=+\infty$
$(\pm\infty)+(+n)=\pm\infty$	$(\pm\infty)+(-n)=\pm\infty$	$(+\infty)+(+\infty)=+\infty$	$(-\infty)+(-\infty)=-\infty$
$(+\infty)\cdot(+\infty)=+\infty$	$(-\infty)\cdot(-\infty)=+\infty$	$(+\infty)\cdot(-\infty)=-\infty$	$(-\infty)\cdot(+\infty)=-\infty$
$(+\infty)\cdot(+n)=+\infty$	$(-\infty)\cdot(+n)=-\infty$	$(+\infty)\cdot(-n)=-\infty$	$(-\infty)\cdot(-n)=+\infty$
$(\pm\infty)^{n-dispari}=(\pm\infty)$	$(\pm\infty)^{n-pari}=(+\infty)$	$\sqrt[n-dispari]{\pm\infty}=\pm\infty$	$\sqrt[n-pari]{+\infty}=+\infty$
$(\pm\infty)^{n-dispari}=\pm\infty$	$(\pm\infty)^{n-pari}=+\infty$	$(+\infty)^{+\infty}=+\infty$	$(+\infty)^{-\infty}=0^+$
$(0^+)^{+\infty}=0^+$	$(0^+)^{-\infty}=+\infty$		

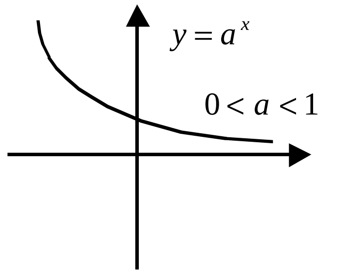
$a > 1$	$0 < a < 1$
$\log_a(0^+) = -\infty$	$\log_a(0^+) = +\infty$
$\log_a(+\infty) = +\infty$	$\log_a(+\infty) = -\infty$
$a^{-\infty} = 0^+$	$a^{-\infty} = +\infty$
$a^{+\infty} = +\infty$	$a^{+\infty} = 0^+$

Questi ultimi valori trovati , legati alle funzioni logaritmiche ed esponenziali , sono meglio giustificati dai corrispondenti grafici relativi.









Interpreteremo tali tipi di tabelle con qualche esempio :

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{x-2}\right)=0 \quad \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x-2}\right)=0 \quad \lim_{x\to2^-}\left(\frac{1}{x-2}\right)=-\infty \quad \lim_{x\to2^+}\left(\frac{1}{x-2}\right)=+\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x}{-2}\right)=+\infty \quad \lim_{x\to+\infty}\left(x^2+2x-5\right)=+\infty \quad \lim_{x\to2^-}\left(\frac{1}{x-2+3x^2}\right)=+\frac{1}{12}$$

$$\lim_{x\to2^+}\left(\frac{x-5}{3x}\right)=-\frac{1}{2} \quad \lim_{x\to+1}\left(x^2+2x-5\right)=-2 \quad \lim_{x\to2^-}\left(\frac{2-x}{x-2+3x^2}\right)=0$$

tali risultati sono stati ottenuti mediante una semplice sostituzione : al valore della variabile x si è sostituito il corrispondente valore su indicato.

LIMITI DI FORMA INDETERMINATA

I limiti di **forma indeterminata** sono tutti quei limiti per i quali , al contrario dei precedenti , non si ottiene immediatamente il risultato.

Le forme cosiddette di indeterminazione sono le seguenti : (generalmente riferite alla funzione)

$$\frac{0}{0} \quad ; \quad \frac{\infty}{\infty} \quad ; \quad \pm\infty\mp\infty \quad ; \quad 0\cdot\infty \quad ; \quad (0)^0 \quad ; \quad (\infty)^0 \quad ; \quad (1)^\infty$$

Esaminiamo quindi i casi più frequenti che si possono verificare :

1° caso : $$\boxed{\lim_{x\to x_0}\frac{A^n(x)}{B^m(x)}=\frac{0}{0}}$$

Tale tipo di limite si risolve applicando i metodi della scomposizione (il tutto per arrivare a semplificare).

Es. $$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-3x+2}{x-1}=\frac{0}{0}\longrightarrow\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x-2)}{x-1}=\lim_{x\to 1}(x-2)=-1$$

Es. $$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-3x+2}{(1-x^2)}=\frac{0}{0}$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x-2)}{(1-x)(1+x)}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x-2)}{-(x-1)(1+x)}=\lim_{x\to 1}-\frac{(x-2)}{(1+x)}=\frac{1}{2}$$

<u>2° caso</u> : $$\boxed{\lim_{x\to\infty}\frac{A^n(x)}{B^m(x)}=\frac{\infty}{\infty}}$$

Tale tipo di limite si risolve mediante raccoglimento a fattor comune , sia al numeratore che al denominatore , della variabile di grado massimo.

Es. $$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+3x+4}{-x^3-x}=\frac{+\infty}{-\infty}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3(\frac{1}{x}+\frac{3}{x^2}+\frac{4}{x^3})}{x^3(-1-\frac{1}{x^2})}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}+\frac{3}{x^2}+\frac{4}{x^3}}{-1-\frac{1}{x^2}}=0$$

Es. $$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^4+3x+4}{+x^3+x}=\frac{+\infty}{+\infty}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^4(1+\frac{3}{x^3}+\frac{4}{x^4})}{x^4(+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^3})}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1+\frac{3}{x^3}+\frac{4}{x^4}}{+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^3}}=+\infty$$

NOTA : Il segno è stato valutato dal rapporto dei segni nella forma indeterminata.

Questo 2° caso pur tuttavia lo possiamo riassumere in un :

2° caso-generalizzato : $$\boxed{\lim_{x \to \infty} \frac{A^n(x)}{B^m(x)} = \frac{\infty}{\infty}}$$

(facciamo presente che il fatto di non indicare i relativi segni per il termine (∞), indica che questo può assumerli indifferentemente tutti).

1)	$\lim_{x \to \infty} \frac{A^n(x)}{B^m(x)} = \infty$	$\boldsymbol{n > m}$
2)	$\lim_{x \to \infty} \frac{A^n(x)}{B^m(x)} = 0$	$\boldsymbol{n < m}$
3)	$\lim_{x \to \infty} \frac{A^n(x)}{B^m(x)} = l \neq 0$	$\boldsymbol{n = m}$

Nei primi due casi volendo valutare **il segno relativo del termine che otterremo** , dovremo valutare **il rapporto dei segni nella forma indeterminata**.

Per ottenere **l'esatto valore del termine *l*** , eseguiremo **il rapporto dei coefficienti dei termini di grado massimo.**

Es. $\lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 + 3x + 4}{-x^3 - x} = \frac{+\infty}{-\infty}$ poiché $\boldsymbol{n = 2}$, $\boldsymbol{m = 3}$ $\lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 + 3x + 4}{-x^3 - x} = 0$

Es. $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^4+3x+4}{+x^3+x} = \frac{+\infty}{+\infty}$ poiché $\boldsymbol{n=4}$, $\boldsymbol{m=3}$ $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^4+3x+4}{+x^3+x} = +\infty$

Es. $\lim_{x\to-\infty} \frac{x-4x^2+5}{2x-8x^2} = \frac{-\infty}{-\infty}$ poiché $\boldsymbol{n=2}$, $\boldsymbol{m=2}$ $\lim_{x\to-\infty} \frac{x-4x^2+5}{2x-8x^2} = \frac{-4}{-8} = \frac{1}{2}$

<u>3° caso</u> : $\boxed{\lim_{x\to x_0} \frac{\sqrt[n]{A^m(x)}}{B^p(x)} = \frac{0}{0}}$ **oppure :** $\boxed{\lim_{x\to x_0} \frac{A^m(x)}{\sqrt[n]{B^p(x)}} = \frac{0}{0}}$

Tale tipo di limite si risolve applicando le operazioni della razionalizzazione di radicali.
(Anche in questo caso è evidente che si arriva poi a semplificare).

Es. $\lim_{x\to1} \frac{\sqrt{2x-2}}{x-1} = \frac{0}{0}$

$$\lim_{x\to1} \frac{\sqrt{2x-2}}{x-1}\cdot\frac{\sqrt{2x-2}}{\sqrt{2x-2}} = \lim_{x\to1} \frac{2(x-1)}{(x-1)\sqrt{2x-2}} = \lim_{x\to1} \frac{2}{\sqrt{2x-2}} = \infty$$

Es. $\lim_{x\to1} \frac{\sqrt{2x-1}-1}{x-1} = \frac{0}{0}$

$$\lim_{x\to1} \frac{(\sqrt{2x-1}-1)}{x-1}\cdot\frac{(\sqrt{2x-1}+1)}{(\sqrt{2x-2}+1)} = \lim_{x\to1} \frac{2x-1-1}{(x-1)(\sqrt{2x-2}+1)} = \lim_{x\to1} \frac{2}{\sqrt{2x-1}+1} = 1$$

Es. $\lim_{x\to 2} \dfrac{x-2}{\sqrt[3]{2x-4}} = \dfrac{0}{0}$

$$\lim_{x\to 2} \frac{x-2}{\sqrt[3]{2x-4}} \cdot \frac{\sqrt[3]{(2x-4)^2}}{\sqrt[3]{(2x-4)^2}} = \lim_{x\to 2} \frac{(x-2)\sqrt[3]{(2x-4)^2}}{2(x-2)} = \lim_{x\to 2} \frac{\sqrt[3]{(2x-4)^2}}{2} = 0$$

4° caso : $\boxed{\lim_{x\to\infty} \dfrac{\sqrt[n]{A^m(x)}}{B^p(x)} = \dfrac{\infty}{\infty}}$ **oppure :** $\boxed{\lim_{x\to\infty} \dfrac{A^m(x)}{\sqrt[n]{B^p(x)}} = \dfrac{\infty}{\infty}}$

Tale tipo di limite si risolve con il raccoglimento a fattor comune della variabile di grado massimo. (Ricordiamo anche che possiamo sempre riferirci alla tabella del 2° caso e quindi applicando un confronto tra i relativi gradi).

Es. $\lim_{x\to +\infty} \dfrac{\sqrt{x^2-4}}{1-x} = \dfrac{+\infty}{-\infty}$

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{\sqrt{x^2(1-\frac{4}{x^2})}}{1-x} = \lim_{x\to +\infty} \frac{|x|\sqrt{1-\frac{4}{x^2}}}{1-x} = \lim_{x\to +\infty} \frac{x\sqrt{1-\frac{4}{x^2}}}{x\left(\frac{1}{x}-1\right)} = \lim_{x\to +\infty} \frac{\sqrt{1-\frac{4}{x^2}}}{\left(\frac{1}{x}-1\right)} = -1$$

Es. $\lim_{x\to -\infty} \dfrac{x-1}{\sqrt{2+x^2}} = \dfrac{-\infty}{+\infty}$

$$\lim_{x\to -\infty} \frac{x(1-\frac{1}{x})}{\sqrt{x^2(\frac{2}{x^2}+1)}} = \lim_{x\to -\infty} \frac{x(1-\frac{1}{x})}{|x|\sqrt{(\frac{2}{x^2}+1)}} = \lim_{x\to -\infty} \frac{x(1-\frac{1}{x})}{-x\sqrt{(\frac{2}{x^2}+1)}} = \lim_{x\to -\infty} \frac{(1-\frac{1}{x})}{-\sqrt{(\frac{2}{x^2}+1)}} = -1$$

<u>**N.B.**</u> Per l'esempio precedente si ricordi che : $\sqrt{x^2} = |x|$, con $|x| = \begin{cases} x & se \quad x > 0 \\ -x & se \quad x < 0 \end{cases}$

5° caso : $\lim_{x \to \infty} A^n(x) = (\pm\infty \mp \infty)$

Tale limite si risolve evidenziando la variabile di grado massimo.

Es. $\lim_{x \to -\infty} \left(x^2 - 3x - 4 + x^3\right) \quad = \quad +\infty - \infty$

$$\lim_{x \to -\infty} \quad x^3\left(\frac{1}{x} - \frac{3}{x^2} - \frac{4}{x^3} + 1\right) \quad = \quad -\infty$$

Sostanzialmente tale tipo di limite viene risolto considerando direttamente il termine di grado massimo.

$$\lim_{x \to -\infty} \left(x^2 - 3x - 4 + x^3\right) \quad = \quad +\infty - \infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} \left(\cancel{x^2} - \cancel{3}x - \cancel{4} + x^3\right) \quad = \quad -\infty$$

6° caso : $\lim_{x \to \infty} \sqrt[n]{A^m(x)} \pm B^p(x) = (\pm\infty \mp \infty)$

Tale tipo di limite si risolve applicando le operazioni di razionalizzazione (è essenziale riconducirci alla forma $\frac{\infty}{\infty}$ **) .**

Es. $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2-2x}-x = (+\infty-\infty)$

$$\lim_{x\to+\infty} (\sqrt{x^2-2x}-x)\cdot\frac{(\sqrt{x^2-2x}+x)}{(\sqrt{x^2-2x}+x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\left(x^2-2x-x^2\right)}{(\sqrt{x^2-2x}+x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{-2x}{(\sqrt{x^2-2x}+x)} =$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to+\infty} \frac{-2x}{(\sqrt{x^2\left(1-\frac{2}{x}\right)}+x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{-2x}{(x\sqrt{\left(1-\frac{2}{x}\right)}+x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{-2x}{x(\sqrt{\left(1-\frac{2}{x}\right)}+1)} = -1$$

Es. $\lim_{x\to-\infty} 2x+\sqrt{4x^2-2x+1} = (-\infty+\infty)$

$$\lim_{x\to-\infty} (2x+\sqrt{4x^2-2x+1})\cdot\frac{(2x-\sqrt{4x^2-2x+1})}{(2x-\sqrt{4x^2-2x+1})} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\left(4x^2-4x^2+2x-1\right)}{(2x-\sqrt{4x^2-2x+1})} =$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to+\infty} \frac{2x-1}{(2x-\sqrt{4x^2-2x+1})} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x-1}{(2x-\sqrt{x^2\left(4-\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}\right)})} =$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to+\infty} \frac{2x-1}{(2x+x\sqrt{\left(4-\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}\right)})} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x-1}{x(2+\sqrt{\left(4-\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}\right)})} = \frac{1}{2}$$

Es. $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{1+4x}-x = (+\infty-\infty)$

$$\lim_{x\to+\infty} (\sqrt{1+4x}-x)\cdot\frac{(\sqrt{1+4x}+x)}{(\sqrt{1+4x}+x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\left(1+4x-x^2\right)}{(\sqrt{1+4x}+x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2\left(\frac{1}{x^2}+\frac{4}{x}-1\right)}{x^2(\frac{\sqrt{1+4x}}{x^2}+\frac{1}{x})} =$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to+\infty} \frac{\left(\frac{1}{x^2}+\frac{4}{x}-1\right)}{(\sqrt{\frac{1}{x^4}+\frac{4}{x^3}}+\frac{1}{x})} = -\infty$$

Forma $\boxed{0\cdot\infty \quad , \quad \infty\cdot 0}$

Tali tipi di forme indeterminate si affrontano inizialmente col ricondurle alle forme $\boxed{\dfrac{0}{0} \quad , \quad \dfrac{\infty}{\infty}}$

Nella maggior parte dei casi , poiché vi è un rapporto fra una funzione algebrica e una trascendente , è necessario risolvere il limite con il teorema di l'Hospital ; se le funzioni sono della stessa natura (algebriche o trascendenti) si possono riapplicare i metodi esposti in precedenza o più opportunamente procedere secondo le relative proprietà algebriche .

a) Se si vuole ottenere la forma $\left(\dfrac{0}{0}\right)$ sarà sufficiente dividere ***numeratore*** e ***denominatore*** , della forma iniziale , per il termine che tende a infinito .

Es.

$$\lim_{x\to 0^+} x\cdot\ln x = (0\cdot\infty) \Rightarrow \lim_{x\to 0^+} \frac{x\cdot\ln x}{1} = (0\cdot\infty) \Rightarrow \lim_{x\to 0^+} \frac{\dfrac{x\cdot\ln x}{\ln x}}{\dfrac{1}{\ln x}} =$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0^+} \frac{x}{\dfrac{1}{\ln x}} = \left(\frac{0}{0}\right)$$

b) Se si vuole ottenere la forma $\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$ sarà sufficiente dividere ***numeratore*** e ***denominatore*** , della forma iniziale , per il termine che tende a zero .

Es.

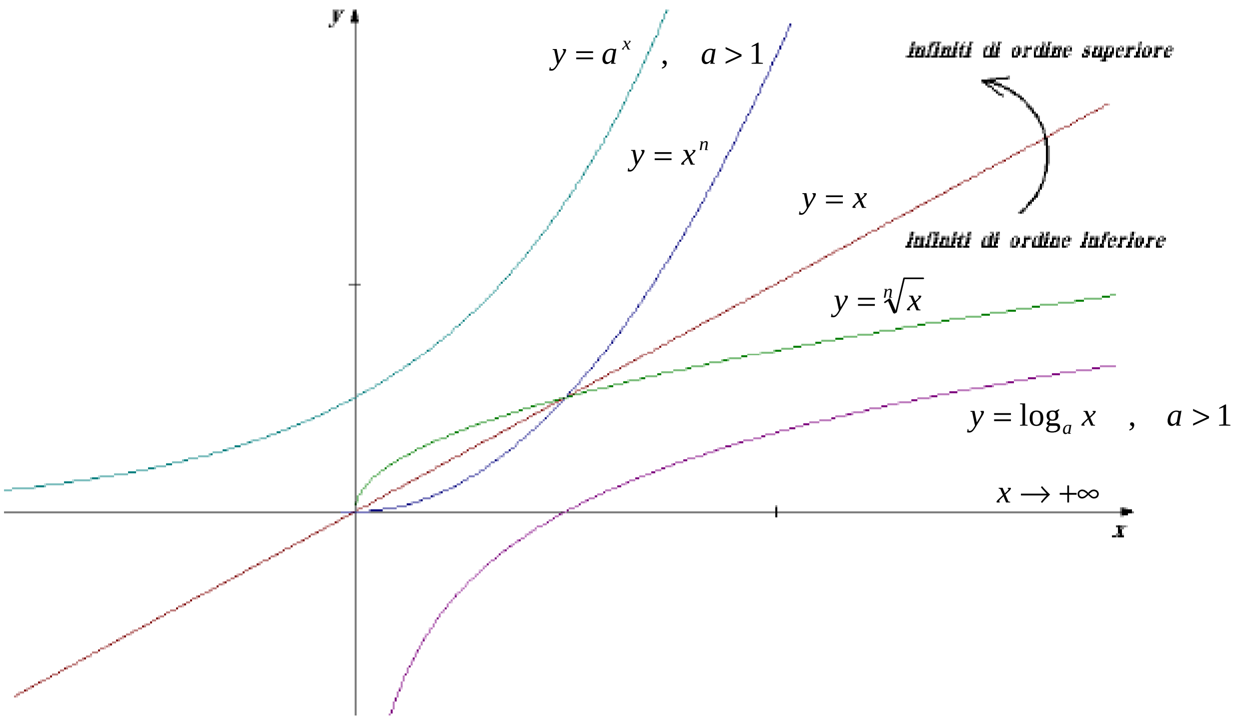
$$\lim_{x\to 0^+} x\cdot\ln x = (0\cdot\infty) \Rightarrow \lim_{x\to 0^+} \frac{x\cdot\ln x}{1} = (0\cdot\infty) \Rightarrow \lim_{x\to 0^+} \frac{\dfrac{x\cdot\ln x}{x}}{\dfrac{1}{x}} =$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{\dfrac{1}{x}} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right)$$

Riassumendo : forme $\boxed{(0\cdot\infty \quad , \quad \infty\cdot 0) \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{0}{0},\frac{\infty}{\infty}\right) \quad \Rightarrow \quad Hospital}$

<u>N.B.</u> Nella forma $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$ diventa sicuramente più vantaggioso rispetto ad Hospital , <u>tranne che in alcuni casi particolari</u> , avvalersi di un metodo di confronto basato sui grafici di alcuni infiniti elementari , ai quali riferirsi per stabilire il risultato del limite .

<u>Grafici di infiniti elementari</u> (riferiti solo al primo quadrante)



Come si può notare , quando si fa tendere la x a $+\infty$, le rispettive funzioni tendono ugualmente $+\infty$, ma con rapidità diversa l'una nei confronti dell'altra .
Ecco quindi che la funzione logaritmo ad esempio , essendo la più lenta nel tendere a $+\infty$, viene a stabilire quello che si chiama un ***infinito di ordine inferiore*** rispetto a tutte le altre.

<u>Faremo ora alcuni esempi</u> :

$$\lim_{x\to 0^+} x\cdot\ln x = (0\cdot\infty) \Rightarrow \lim_{x\to 0^+} \frac{x\cdot\ln x}{1} = (0\cdot\infty) \Rightarrow \lim_{x\to 0^+} \frac{\dfrac{x\cdot\ln x}{x}}{\dfrac{1}{x}} =$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{\dfrac{1}{x}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{x^{-1}} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right)$$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{x^{-1}} = 0$$

infinito di ordine superiore

$$\lim_{x\to -\infty} x\cdot e^{x} = (\infty\cdot 0) \Rightarrow \lim_{x\to -\infty} \frac{x}{e^{-x}} = \left(\frac{-\infty}{+\infty}\right)$$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{x}{e^{-x}} = 0$$

infinito di ordine superiore

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{2x-1}{\ln\left(3x^2-2\right)} = \left(\frac{+\infty}{+\infty}\right) \Rightarrow \lim_{x\to +\infty} \frac{2x-1}{\ln\left(3x^2-2\right)} = +\infty$$

infinito di ordine superiore

<u>Caso particolare</u> :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln\left(e^{2x}+x+2\right)}{x-2} = \left(\frac{+\infty}{+\infty}\right) \Rightarrow \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln\left(e^{2x}+x+2\right)}{x-2} = 0$$

infinito di ordine superiore

<u>in questo caso avremmo commesso un grave errore!</u>

Infatti :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln\left(e^{2x}+x+2\right)}{x-2} = \left(\frac{+\infty}{+\infty}\right) \Rightarrow \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln\left[e^{2x}\left(1+\frac{x}{e^{2x}}+\frac{2}{e^{2x}}\right)\right]}{x-2} =$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln e^{2x}+\ln\left(1+\frac{x}{e^{2x}}+\frac{2}{e^{2x}}\right)}{x-2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln e^{2x}}{x-2} + \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln\left(1+\frac{x}{e^{2x}}+\frac{2}{e^{2x}}\right)}{x-2} =$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to+\infty} \frac{2x}{x-2} + \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln\left(1+\frac{x}{e^{2x}}+\frac{2}{e^{2x}}\right)}{x-2} = 2$$

il che dimostra che gli infiniti sono dello stesso ordine!

infinito di ordine superiore

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{4x-2}}{1+x} = \left(\frac{+\infty}{+\infty}\right) \Rightarrow \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{4x-2}}{1+x} = +\infty$$

<u>Anche in questo caso avremmo commesso un grave errore!</u>

Algebricamente si ha :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{4x-2}}{1+x} = \left(\frac{+\infty}{+\infty}\right) \Rightarrow \lim_{x\to+\infty} \sqrt{\frac{4x-2}{(1+x)^2}} = \lim_{x\to+\infty} \sqrt{\frac{x^2\left(\frac{4}{x}-\frac{2}{x^2}\right)}{x^2\left(\frac{1}{x^2}+\frac{2}{x}+1\right)}} =$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to+\infty} \sqrt{\frac{\left(\frac{4}{x}-\frac{2}{x^2}\right)}{\left(\frac{1}{x^2}+\frac{2}{x}+1\right)}} = 0$$

che dimostra come il denominatore sia un infinito di ordine superiore!

Forme indeterminate del tipo $\boxed{\left(0^0 \quad , \quad \infty^0 \quad , \quad 1^\infty\right)}$

Sono generate da funzioni composte del tipo $\boxed{f(x)^{g(x)}}$.

La risoluzione di limiti , che presentano tale tipologia di forma indeterminata , si riscontra nei seguenti casi:

a) **Trasformazione** (secondo definizione logaritmica) **della funzione composta in funzione esponenziale di base prefissata** . (Di solito la base dei logaritmi Neperiani e = 2,71…)
Successivamente la riconduzione alle forme $\left(\frac{0}{0} ; \frac{\infty}{\infty}\right)$

$$\boxed{f(x)^{g(x)} = e^{\ln f(x)^{g(x)}} = e^{g(x)\ln f(x)}}$$

b) <u>Utilizzo di alcune forme notevoli conosciute</u> .

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} = e$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x+1}{x}\right)^{x} = e$$

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$$

$$\lim_{x\to+\infty}\log_a\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} = \log_a e$$

$$\lim_{x\to+\infty}\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} = 1$$

$$\lim_{x\to 0}\log_a(1+x)^{\frac{1}{x}} = \log_a e$$

$$\lim_{x\to 0}\ln(1+x)^{\frac{1}{x}} = 1$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x} = \ln a$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x} = 1$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{a^x-1}{x} = +\infty \quad (a>1)$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{a^x-1}{x} = 0 \quad (0<a<1)$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{a^x-1}{x} = 0 \quad (a>1)$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{a^x-1}{x} = -\infty \quad (0<a<1)$$

Esercizi : calcolare i seguenti limiti :

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x-1}{x+3}\right)^{x} = (1)^{\infty} \Rightarrow \lim_{x\to+\infty}\left(1-1+\frac{x-1}{x+3}\right)^{x} = \lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{-x-3+x-1}{x+3}\right)^{x} =$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{-4}{x+3}\right)^{x} = \lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{\left(\frac{x+3}{-4}\right)}\right)^{x} = \lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{\left(\frac{x+3}{-4}\right)}\right)^{x\cdot\left(\frac{x+3}{-4}\right)\left(\frac{-4}{x+3}\right)} =$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{\left(\frac{x+3}{-4}\right)}\right)^{x\cdot\left(\frac{x+3}{-4}\right)\left(\frac{-4}{x+3}\right)} = \lim_{x\to+\infty}\left[\left(1+\frac{1}{\left(\frac{x+3}{-4}\right)}\right)^{\left(\frac{x+3}{-4}\right)}\right]^{\left(\frac{-4x}{x+3}\right)} = e^{-4}$$

ricordando che : $\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} = e$.

Allo stesso modo si poteva procedere utilizzando la trasformazione : $f(x)^{g(x)} = e^{g(x)\ln f(x)}$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x-1}{x+3}\right)^{x} = (1)^{\infty} \Rightarrow e^{x\cdot\ln\left(\frac{x-1}{x+3}\right)} = e^{\lim\limits_{x\to+\infty} x\cdot\ln\left(\frac{x-1}{x+3}\right)} =$$

$$\Rightarrow e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(\frac{x-1}{x+3}\right)}{\frac{1}{x}}} = e^{H\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\frac{x+3-x+1}{(x+3)^2}\cdot\frac{x+3}{x-1}}{-\frac{1}{x^2}}} = e^{\lim\limits_{x\to+\infty}-\frac{4x^2}{(x+3)(x-1)}} =$$

$$\Rightarrow e^{\lim\limits_{x\to+\infty}-\frac{4x^2}{x^2+2x-3}} = e^{-4}$$

<u>N.B. abbiamo anticipato l'applicazione di l'Hospital (trattato però successivamente!)</u>

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{3}{x}\right)^{2+x} = \lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{3}{x}\right)^{2}\cdot\left(1+\frac{3}{x}\right)^{x} = \lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{3}{x}\right)^{2}\cdot\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{3}{x}\right)^{x} =$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{3}{x}\right)^{x} = \lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{x}{3}}\right)^{\frac{x}{3}3} = \lim_{x\to+\infty}\left[\left(1+\frac{1}{\frac{x}{3}}\right)^{\frac{x}{3}}\right]^{3} = e^{3}$$

calcolare :

$$\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{a^{2x}-1}{x}\right)^{3x} = \lim_{x\to 0^+}\left(\frac{a^{2x}-1}{\frac{2x}{2}}\right)^{3x} = \lim_{x\to 0^+}\left(2\cdot\frac{a^{2x}-1}{2x}\right)^{3x} =$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0^+}(2)^{3x}\cdot\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{a^{2x}-1}{2x}\right)^{3x} = 1$$

calcolare il valore del parametro reale a per cui sia :

$$\lim_{x\to 0^+}\left(1+\frac{2a}{ctgx}\right)^{2+\frac{1}{tgx}} = 2$$

$$\lim_{x\to 0^+}\left(1+\frac{2a}{ctgx}\right)^{2+\frac{1}{tgx}} = (1)^{\infty} \Rightarrow \lim_{x\to 0^+}\left(1+\frac{2a}{ctgx}\right)^{2}\cdot\left(1+\frac{2a}{ctgx}\right)^{\frac{1}{tgx}} = \lim_{x\to 0^+}\left(1+\frac{2a}{ctgx}\right)^{\frac{1}{tgx}}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0^+}\left(1+\frac{1}{\frac{ctgx}{2a}}\right)^{\frac{ctgx}{2a}\cdot 2a} = \lim_{x\to 0^+}\left[\left(1+\frac{1}{\frac{ctgx}{2a}}\right)^{\frac{ctgx}{2a}}\right]^{2a} = e^{2a}$$

da cui eguagliando : $e^{2a}=2 \quad\Rightarrow\quad 2a=\ln 2 \quad\Rightarrow\quad a=\ln\sqrt{2}$

ASINTOTI

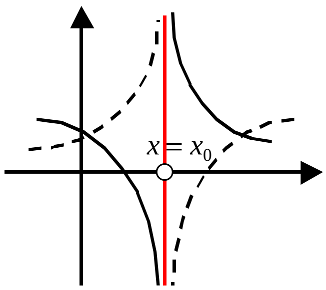
Per asintoti di una funzione intenderemo delle particolari rette a cui la funzione tende all'infinito.

Classificheremo gli asintoti in:

ASINTOTI VERTICALI ; **ASINTOTI ORIZZONTALI** ; **ASINTOTI OBLIQUI** .

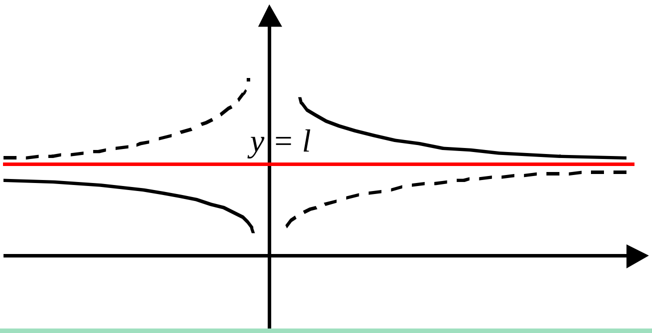
a) ASINTOTO VERTICALE di equazione $\boxed{x = x_0}$

Condizione necessaria e sufficiente : $\boxed{\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty}$



b) ASINTOTO ORIZZONTALE di equazione $\boxed{y = l}$

Condizione necessaria e sufficiente : $\boxed{\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = l}$

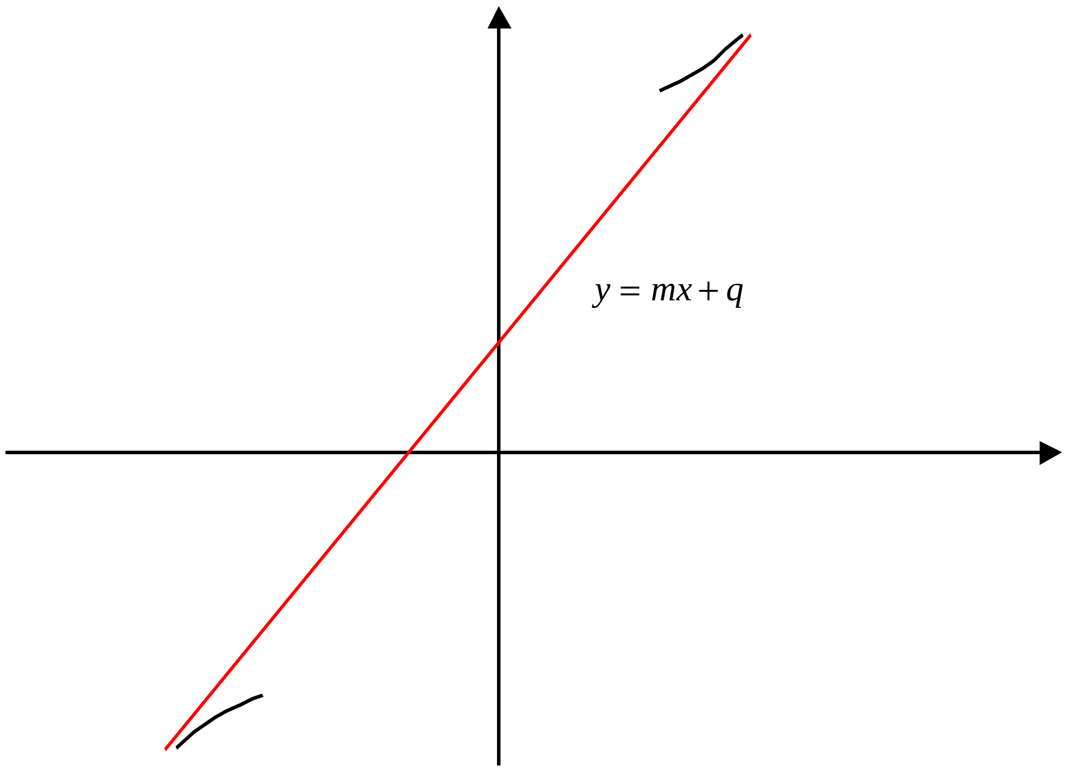


c) <u>ASINTOTO OBLIQUO</u> : di equazione $\boxed{y = mx + q}$

<u>Condizione necessaria</u> $\boxed{\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty}$

<u>Condizione sufficiente</u> $\boldsymbol{m}$ e $\boldsymbol{q}$ <u>valori numerici finiti</u> con $\boxed{m \neq 0}$

$$\boxed{m = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x}} \qquad \boxed{q = \lim_{x \to \infty} f(x) - mx}$$



Nota: **E' evidente il fatto che la presenza di asintoti orizzontali esclude automaticamente la presenza di asintoti obliqui.**

ESERCIZI SUI LIMITI

ESERCIZI SUGLI ASINTOTI DELLE SEGUENTI FUNZIONI

$f(x)=\frac{2x-\sqrt{x^2-4}}{x}$	$f(x)=\frac{3x-\sqrt{9x^2+1}}{2x}$	$f(x)=\frac{x^2-3x+2}{x+3}$	$f(x)=\lvert x-1\rvert\cdot e^{\frac{1}{x-1}}$
$f(x)=2x-\ln(x-2)$	$f(x)=-x-\sqrt{x^2-2x}$	$f(x)=\frac{\sqrt[3]{x^3-2}}{2x}$	$f(x)=\frac{\sqrt{x-1}}{x^2-3x+2}$
$f(x)=\frac{x^3-2kx^2}{-x^2+3x-2}$	$f(x)=\frac{2kx^3-2kx}{x^2-3kx}$		

Risolvere i seguenti limiti

1. $$\lim_{x \to 1^+} \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 1}$$?

2. $$\lim_{x \to -\infty} \frac{4x + x^3}{1 - 2x}$$?

3. $$\lim_{x \to +\infty} \frac{5 + x^2}{4x + x^3}$$?

4. $$\lim_{x \to -\infty} \frac{4x^2 + x^4}{2x^4 - x}$$?

5. $$\lim_{x \to -2^-} \frac{x^2 - 4}{2 + x}$$?

6. $\lim_{x\to+\infty} \frac{1-3x}{x^2+2x+3}$

?

7. $\lim_{x\to-1^+} \frac{4x+3}{1-x}$

?

8. $\lim_{x\to+2^-} \frac{4+x^2}{1-2x^2}$

?

9. $\lim_{x\to 1} \frac{2x-1}{4x^2+3x-7}$

?

10. $\lim_{x\to-1} \frac{3x+x^2}{4x+4}$

?

11. $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^2-3x}{2x+x^3}$?

12. $\lim\limits_{x\to1} \dfrac{1-2x+x^2}{x-1}$?

13. $\lim\limits_{x\to-2} \dfrac{4-2x}{2x^2-x-10}$?

14. $\lim\limits_{x\to-3} \dfrac{3x+9}{\frac{1}{3}x+1}$?

15. $\lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{2x+x^2}{x^2+4x-1}$?

16. $\lim_{x\to+2} \frac{4x-8}{2-7x+3x^2}$

?

17. $\lim_{x\to+\infty} 2x^2-4x$

?

18. $\lim_{x\to-\infty} 7x^2+2x-1$

?

19. $\lim_{x\to-\infty} 4x^2-3x+x^3$

?

20. $\lim_{x\to-\infty} \frac{2x^2+3x}{4x^2-2}$

?

21. $$\lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x^2 - 3x}}{x}$$?

22. $$\lim_{x \to +\infty} \frac{1 - \sqrt{5x}}{x}$$?

23. $$\lim_{x \to 1} \frac{\sqrt{x - 1}}{x^2 - 2x + 1}$$?

24. $$\lim_{x \to -2} \frac{\sqrt{4 - x^2}}{3x + 6}$$?

25. $\lim_{x \to -\infty} \frac{4-\sqrt{x^2+1}}{2x-2}$

?

26. $\lim_{x \to +\infty} \frac{2x-3}{4+\sqrt{x^2-3x}}$

?

27. $\lim_{x \to 0} \frac{-2x}{\sqrt{x^2-3x}}$

?

28. $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{2x+2}{\sqrt{x^2-1}}$

?

29. $\lim\limits_{x\to +\infty} -2x+\sqrt{4x^2+2x}$

?

30. $\lim\limits_{x\to -\infty} \sqrt{4-4x}+\sqrt{|x|}$

?

31. $$\lim_{x \to -\infty} \frac{2+4x^2-\sqrt{3x^2+4}}{\sqrt{2-3x}}$$

?

32. $$\lim_{x \to -\infty} \frac{|x-1| - |4x+3|}{\sqrt{4x^2 - 1}}$$

?

33. $$\lim_{x \to +\infty} x - \sqrt[3]{1+2x^3}$$

?

34. $$\lim_{x \to -\infty} \sqrt[3]{2x+1} - \sqrt[3]{2x-2}$$

?

35. $$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 - 2x - \sqrt{x^4 - 3x^2 + 2}}{5x - 2}$$

?

36. $$\lim_{x \to -\infty} \frac{|-5x-1|\sqrt{3x^2-5}}{\sqrt{x^4-2x}}$$

?

37. $$\lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{-2x^3+4x}}{\left|4x+\sqrt{-5x^3}\right|}$$

?

38. $$\lim_{x\to-\infty} |4-x|\sqrt{\frac{x-2}{3x^3+1}}$$

?

39. $$\lim_{x\to 0^+} \frac{-2e^{-2x+1}}{\sqrt{x^2-3x}}$$

?

40. $$\lim_{x\to -1} \frac{2x+2}{\sqrt{x^2-1}} \cdot \log_4(x+3)$$

?

41. $$\lim_{x\to 1^-} \left(1-x^2\right)\ln(1-x)$$

?

42. $$\lim_{x\to+\infty} 3x - \ln\left(4x^4 + 2x - 3\right)$$

?

43. $$\lim_{x\to-\infty} \frac{x\cdot 5^{2x}}{\sqrt{x^2 - 3x}}$$

?

44. $$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{\frac{3x}{4\sqrt{x}+2}}}{\sqrt{4x^2-7}}$$

?

45. $$\lim_{x\to\frac{1}{2}^-} (2-4x)\cdot e^{\frac{1}{2x-1}}$$

?

46. $$\lim_{x \to \frac{1}{2}^+} (2-4x)\cdot e^{\frac{1}{2x-1}}$$

?

47. $$\lim_{x \to -\infty} 2^{2x} - 3x + \sqrt[3]{x^{11}}$$

?

48. $$\lim_{x \to -\infty} 3x + 4 + x^2 - \ln(2-x)$$

?

49. $$\lim_{x\to+\infty} \frac{|3-2x|}{3x}\sqrt{\frac{e^x-3}{\sqrt{4e^{2x}}}}$$

?

50. $$\lim_{x\to+\infty} \frac{7x+3-x^2}{\sqrt{\left|-e^{2x+1}\right|}}$$

?

51. $$\lim_{x\to-\infty} (2x+1)\cdot e^{4x-2}$$

?

52. $$\lim_{x \to -\infty} \frac{x e^{\frac{-x+2}{4x+8}}}{\sqrt{x^2 - 4}}$$?

53. $$\lim_{x \to \frac{2}{3}^+} (3x-2)\sqrt[3]{\ln\left(x - \frac{2}{3}\right)}$$?

54. $$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^{2\sqrt{x}-\sqrt{3x+1}}$$

?

55. $$\lim_{x\to 1^+}\left|\ln(x-1)\right|\cdot\sqrt{\frac{x^2-3x+2}{1-x}}$$

?

56. $$\lim_{x\to -1^-} \frac{e^{\frac{-5x}{x+1}}}{\sqrt{\frac{4x^2}{x^2-1}}}$$

?

Determinare gli asintoti delle seguenti funzioni :

1. $$\boxed{f(x) = \frac{2x - \sqrt{x^2 - 4}}{x}}$$

$$\boxed{D: \quad x \leq -2 \quad , \quad x \geq +2}$$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{2x - \sqrt{x^2 - 4}}{x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{2x - \sqrt{x^2\left(1 - \frac{4}{x^2}\right)}}{x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{2x - (-x)\sqrt{\left(1 - \frac{4}{x^2}\right)}}{x}$$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{x\left(2 + \sqrt{1 - \frac{4}{x^2}}\right)}{x} = \lim_{x \to -\infty} 2 + \sqrt{1 - \frac{4}{x^2}} = 3$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{2x - \sqrt{x^2 - 4}}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{2x - \sqrt{x^2\left(1 - \frac{4}{x^2}\right)}}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{2x - x\sqrt{\left(1 - \frac{4}{x^2}\right)}}{x}$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x\left(2 - \sqrt{1 - \frac{4}{x^2}}\right)}{x} = \lim_{x \to +\infty} 2 - \sqrt{1 - \frac{4}{x^2}} = 1$$

e quindi $y = 3$, $y = 1$ asintoti orizzontali .

2. $f(x)=\dfrac{3x-\sqrt{9x^2+1}}{2x}$

$D:\quad x\neq 0$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{3x-\sqrt{9x^2+1}}{2x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{3x-\sqrt{x^2\left(9+\frac{1}{x^2}\right)}}{2x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{3x-(-x)\sqrt{\left(9+\frac{1}{x^2}\right)}}{2x}$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x\left(3+\sqrt{9+\frac{1}{x^2}}\right)}{2x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{3+\sqrt{9+\frac{1}{x^2}}}{2}=3$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{3x-\sqrt{9x^2+1}}{2x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{3x-\sqrt{x^2\left(9+\frac{1}{x^2}\right)}}{2x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{3x-x\sqrt{\left(9+\frac{1}{x^2}\right)}}{2x}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(3-\sqrt{9+\frac{1}{x^2}}\right)}{2x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{3-\sqrt{9+\frac{1}{x^2}}}{2}=0$$

e quindi $y=3$, $y=0$ asintoti orizzontali .

$$\lim_{x\to0}\frac{3x-\sqrt{9x^2+1}}{2x}=\infty$$

e quindi $x=0$ asintoto verticale .

3. $f(x)=\dfrac{x^2-3x+2}{x+3}$

$D:\ \ x\neq -3$

$$m=\lim_{x\to\infty}\ \frac{x^2-3x+2}{x+3}\cdot\frac{1}{x}\ =\ \lim_{x\to\infty}\ \frac{x^2-3x+2}{x^2+3x}\ =\ \lim_{x\to\infty}\ \frac{x^2\left(1-\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}\right)}{x^2\left(1+\frac{3}{x}\right)}$$

$$\lim_{x\to\infty}\ \frac{\left(1-\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}\right)}{\left(1+\frac{3}{x}\right)}\ =\ 1$$

$$q=\lim_{x\to\infty}\ \frac{x^2-3x+2}{x+3}-x\ =\ \lim_{x\to\infty}\ \frac{x^2-3x+2-x^2-3x}{x+3}\ =\ \lim_{x\to\infty}\ \frac{-6x+2}{x+3}$$

$$\lim_{x\to\infty}\ \frac{x\left(-6+\frac{2}{x}\right)}{x\left(1+\frac{3}{x}\right)}\ =\ \lim_{x\to\infty}\ \frac{\left(-6+\frac{2}{x}\right)}{\left(1+\frac{3}{x}\right)}\ =\ -6$$

$$\lim_{x\to -3}\ \frac{x^2-3x+2}{x+3}\ =\ \infty$$

e quindi $y=\ x-6$, $x=-3$ asintoti obliquo e verticale .

4. $f(x)=|x-1|\cdot e^{\frac{1}{x-1}}$

$D:\quad x\neq 1$

$$\lim_{x\to 1^-}(1-x)\cdot e^{\frac{1}{x-1}} = 0$$

$$\lim_{x\to 1^+}(x-1)\cdot e^{\frac{1}{x-1}} = \lim_{x\to 1^+}\frac{e^{\frac{1}{x-1}}}{\frac{1}{x-1}} \overset{H}{=} \lim_{x\to 1^+}\frac{-\frac{1}{(x-1)^2}\cdot e^{\frac{1}{x-1}}}{-\frac{1}{(x-1)^2}} \Rightarrow \lim_{x\to 1^+} e^{\frac{1}{x-1}} = +\infty$$

$$m=\lim_{x\to+\infty}\frac{(x-1)\cdot e^{\frac{1}{x-1}}}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x-1}{x}\cdot\lim_{x\to+\infty} e^{\frac{1}{x-1}} = 1$$

$$q=\lim_{x\to+\infty}(x-1)\cdot e^{\frac{1}{x-1}}-x = \lim_{x\to+\infty} x\cdot e^{\frac{1}{x-1}}-e^{\frac{1}{x-1}}-x = -1+\lim_{x\to+\infty} xe^{\frac{1}{x-1}}-x$$

$$q=-1+\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{\frac{1}{x-1}}-1}{\frac{1}{x}} = -1+ H\lim_{x\to+\infty}\frac{-\frac{1}{(x-1)^2}\cdot e^{\frac{1}{x-1}}}{-\frac{1}{x^2}}$$

$$\Rightarrow -1+\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{(x-1)^2}\cdot e^{\frac{1}{x-1}} = -1+1 = 0$$

$$m=\lim_{x\to-\infty}\frac{(1-x)\cdot e^{\frac{1}{x-1}}}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{1-x}{x}\cdot\lim_{x\to-\infty}e^{\frac{1}{x-1}}=-1$$

$$q=\lim_{x\to-\infty}(1-x)\cdot e^{\frac{1}{x-1}}+x=\lim_{x\to-\infty}-x\cdot e^{\frac{1}{x-1}}+e^{\frac{1}{x-1}}+x=+1-\lim_{x\to-\infty}xe^{\frac{1}{x-1}}-x$$

$$q=+1-\lim_{x\to-\infty}\frac{e^{\frac{1}{x-1}}-1}{\frac{1}{x}}=+1-H\lim_{x\to-\infty}\frac{-\frac{1}{(x-1)^2}\cdot e^{\frac{1}{x-1}}}{-\frac{1}{x^2}}$$

$$\Rightarrow\ +1-\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2}{(x-1)^2}\cdot e^{\frac{1}{x-1}}=+1-1=0$$

e quindi $y=x$, $x=-3$ asintoti obliquo e verticale .

5. $\boxed{f(x)=2x-\ln(x-2)}$

$\boxed{D:\ \ x>2}$

$$\lim_{x\to+\infty}2x-\ln(x-2)=\lim_{x\to+\infty}x\left(2-\frac{\ln(x-2)}{x}\right)=\lim_{x\to+\infty}x\cdot\lim_{x\to+\infty}\left(2-\frac{\ln(x-2)}{x}\right)$$

$$\Rightarrow\ \lim_{x\to+\infty}x\cdot\left[2-H\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x-2}}{1}\right]=+\infty$$

$$m = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x-\ln(x-2)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \left(2-\frac{\ln(x-2)}{x}\right) = \lim_{x\to+\infty} 2-\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x-2)}{x}$$

$$\Rightarrow \quad 2 \quad + \quad H \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{x-2}}{1} = +2$$

$$q = \lim_{x\to+\infty} 2x-\ln(x-2)-2x = \lim_{x\to+\infty} \ln(x-2) = +\infty$$

$$\lim_{x\to 2^+} 2x-\ln(x-2) = -\infty$$

e quindi $\quad x = 2 \quad$ asintoto verticale .

6. $$\boxed{f(x)=\frac{\sqrt[3]{x^3-2}}{2x}}$$

$$\boxed{D: \quad x \neq 0}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{x^3-2}}{2x} = \infty$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt[3]{x^3-2}}{2x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt[3]{x^3\left(1-\frac{2}{x^3}\right)}}{2x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x\sqrt[3]{\left(1-\frac{2}{x^3}\right)}}{2x} = \frac{1}{2}$$

e quindi $\quad y=\frac{1}{2} \quad , \quad x=0 \quad$ asintoti orizzontale e verticale .

7. $f(x) = -x - \sqrt{x^2 - 2x}$

$D: \; x \leq 0 \;\; ; \;\; x \geq 2$

$$\lim_{x \to -\infty} -x - \sqrt{x^2 - 2x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{\left(-x - \sqrt{x^2 - 2x}\right) \cdot \left(-x + \sqrt{x^2 - 2x}\right)}{\left(-x + \sqrt{x^2 - 2x}\right)}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to -\infty} \frac{x^2 - x^2 + 2x}{\left(-x + \sqrt{x^2 - 2x}\right)} = \lim_{x \to -\infty} \frac{+2x}{\left(-x - x\sqrt{1 - \frac{2}{x}}\right)} = \lim_{x \to -\infty} \frac{+2x}{x\left(-1 - \sqrt{1 - \frac{2}{x}}\right)} = -1$$

$$\lim_{x \to +\infty} -x - \sqrt{x^2 - 2x} = -\infty$$

$$m = \lim_{x \to +\infty} \frac{-x - \sqrt{x^2 - 2x}}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{-x - x\sqrt{1 - \frac{2}{x}}}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{-x\left(1 + \sqrt{1 - \frac{2}{x}}\right)}{x} = -2$$

$$q = \lim_{x \to +\infty} -x - \sqrt{x^2 - 2x} + 2x = \lim_{x \to +\infty} x - \sqrt{x^2 - 2x} = (+\infty - \infty)$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\left(x - \sqrt{x^2 - 2x}\right) \cdot \left(x + \sqrt{x^2 - 2x}\right)}{\left(x + \sqrt{x^2 - 2x}\right)} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 - x^2 + 2x}{\left(x + \sqrt{x^2 - 2x}\right)} = \lim_{x \to +\infty} \frac{+2x}{\left(x + \sqrt{x^2 - 2x}\right)}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to +\infty} \frac{+2x}{\left(x + x\sqrt{1 - \frac{2}{x}}\right)} = \lim_{x \to +\infty} \frac{+2x}{x\left(1 + \sqrt{1 - \frac{2}{x}}\right)} = 1$$

e quindi $y = -1$ asintoto orizzontale , $y = 2x + 1$ asintoto obliquo .

8. $f(x)=\dfrac{\sqrt{x-1}}{x^2-3x+2}$

$D:\ \ x>1\ \ ;\ \ x\neq 2$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x-1}}{x^2-3x+2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x-1}}{(x-1)(x-2)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x-1}}{(x-1)(x-2)}\cdot\frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x-1}}$$

$$\Rightarrow\ \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{x-1}(x-2)}=0$$

$$\lim_{x\to1^+}\frac{\sqrt{x-1}}{x^2-3x+2}=\lim_{x\to1^+}\frac{\sqrt{x-1}}{(x-1)(x-2)}\cdot\frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x-1}}=\lim_{x\to1^+}\frac{1}{\sqrt{x-1}(x-2)}=-\infty$$

$$\lim_{x\to2}\frac{\sqrt{x-1}}{x^2-3x+2}=\lim_{x\to2}\frac{\sqrt{x-1}}{(x-1)(x-2)}=\infty$$

e quindi $y=0$ asintoto orizzontale , $x=1$, $x=2$ asintoti verticali .

9. $f(x)=\dfrac{x^3-2kx^2}{-x^2+3x-2}$

Determinare per quale valore di $k\in\Re$ la funzione ha come asintoto $y=-x$.

$D:\ x\neq 1\ ;\ x\neq 2$

Trattandosi di asintoto obliquo avremo :

$$m=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3-2kx^2}{-x^2+3x-2}\cdot\frac{1}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3-2kx^2}{-x^3+3x^2-2x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3\left(1-\frac{2k}{x}\right)}{x^3\left(-1+\frac{3}{x}-\frac{2}{x^2}\right)}$$

$$\Rightarrow\ \lim_{x\to\infty}\frac{\left(1-\frac{2k}{x}\right)}{\left(-1+\frac{3}{x}-\frac{2}{x^2}\right)}=-1$$

$$q=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3-2kx^2}{-x^2+3x-2}+x=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3-2kx^2-x^3+3x^2-2x}{-x^3+3x^2-2x}=\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2-2kx^2-2x}{-x^3+3x^2-2x}$$

$$\Rightarrow\ \lim_{x\to\infty}\frac{x^2(3-2k)-2x}{-x^3+3x^2-2x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3\left[\frac{(3-2k)}{x}-\frac{2}{x^2}\right]}{x^3\left(-1+\frac{3}{x}-\frac{2}{x^2}\right)+3x^2-2x}=0$$

e quindi si può notare che qualunque valore si attribuisca a k l'asintoto obliquo è comunque verificato .

10. $$\boxed{f(x)=\frac{2kx^3-2kx}{x^2-3kx}}$$

Determinare per quale valore di $k \in \Re$ la funzione ha come asintoto $y=2x$.

$$\boxed{D: \quad x \neq 0 \quad ; \quad x \neq 3k}$$

Trattandosi di asintoto obliquo avremo :

$$m=\lim_{x\to\infty}\frac{2kx^3-2kx}{x^2-3kx}\cdot\frac{1}{x} = \lim_{x\to\infty}\frac{2kx^3-2kx}{x^3-3kx} = \lim_{x\to\infty}\frac{x^3\left(2k-\frac{2k}{x^2}\right)}{x^3\left(1-\frac{3k}{x^2}\right)} = 2k$$

e poiché $m=2 \quad\Rightarrow\quad 2k=2 \quad\Rightarrow\quad k=1$

$$q=\lim_{x\to\infty}\frac{2x^3-2x}{x^2-3x}-2x = \lim_{x\to\infty}\frac{2x^3-2x-2x^3+6x^2}{x^3-3x} = \lim_{x\to\infty}\frac{6x-2}{x^2-3} = 0$$

per cui $k=1$.