1. Sia f l'endomorfismo di R^3 $f(x,y,z) = (2x, 3x+y, x+3y+4z)$

a) determinare la matrice di f rispetto alla base canonica di R^3

b) Trovare la dimensione dell'immagine e del nucleo di f

c) Trovare gli autovalori e gli autospazi

a) Dalla base canonica di R^3 si ha che :

$f(1,0,0) = (2,3,1)$

$f(0,1,0) = (0,1,3)$

$f(0,0,1) = (0,0,4)$

di qui la matrice associata in base canonica $A_f = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$

b) Calcolando il rango della matrice A_f, abbiamo la dimensione dell' Imm$f$:

$$\det A_f = 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 8 \quad \Rightarrow \qquad r(A) = Dim\,\mathrm{Im}\, f = 3$$

e dunque ricordando che : $DimR^3 = Dim\,\mathrm{Im}\, f + DimKerf$

si ha automaticamente che DimKer$f$ = 0

c) Ricordando la definizione di autovalore di una matrice e impostando la relazione $|A-\lambda I|=0$, si ha che :

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & 0 \\ 3 & 1-\lambda & 0 \\ 1 & 3 & 4-\lambda \end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad (2-\lambda)(1-\lambda)(4-\lambda)=0 \quad \Rightarrow \quad \left| \begin{array}{l} \lambda_1 = 2 \\ \lambda_2 = 1 \\ \lambda_3 = 4 \end{array} \right. \quad \text{autovalori di A}$$

e per i relativi autospazi , $AX=\lambda X$, si ha :

$$\lambda_1 = 2 \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} 3x-y=0 \\ x+3y+2z=0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} y=3x \\ z=-5x \end{cases} \quad \textbf{Autospazio}$$

$$\lambda_1 = 1 \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 1\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x=0 \\ 3y+3z=0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x=0 \\ y=-z \end{cases} \quad \textbf{Autospazio}$$

$$\lambda_1 = 4 \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 4\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases} \quad \textbf{Autospazio}$$

2. Scrivere l'equazione del fascio di piani di asse la retta che congiunge i due punti P (1 , 2 , 4) e Q (2 , 2 , 5) .

Dall'equazione della retta per due punti : $\dfrac{x-x_1}{x_2-x_1} = \dfrac{y-y_1}{y_2-y_1} = \dfrac{z-z_1}{z_2-z_1}$

Si ha : $r: \begin{cases} \dfrac{x-1}{2-1} = \dfrac{z-4}{5-4} \\ y-2=0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x-z+3=0 \\ y-2=0 \end{cases}$

E quindi l'equazione del fascio :

$$\lambda(x-z+3)+\mu(y-2)=0$$

3. Studiare la funzione e disegnarne il grafico

$$f(x)=\frac{|x^5-x^4|}{x}-2$$

1. Dominio : $\forall x \in \Re : x \neq 0$

ottimizzando la funzione si ha : $$f(x) = \begin{cases} x^4-x^3-2 & se \quad x \geq 1 \\ -x^4+x^3-2 & se \quad x<1 \end{cases}$$

3. Limiti :

$$\lim_{x\to-\infty} -x^4+x^3-2 = \lim_{x\to-\infty} x^4\left(-1+\frac{1}{x}-\frac{2}{x^4}\right) = -\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} x^4-x^3-2 = \lim_{x\to+\infty} x^4\left(1-\frac{1}{x}-\frac{2}{x^4}\right) = +\infty$$

$$\lim_{x\to 0} -x^4+x^3-2 = -2$$

4. Asintoti :

Verifica esistenza asintoti obliqui : $y = mx+q$

$$m = \lim_{x\to-\infty} \frac{-x^4+x^3-2}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^4\left(-1+\frac{1}{x}-\frac{2}{x^4}\right)}{x} = +\infty$$

$$m = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^4-x^3-2}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^4\left(1-\frac{1}{x}-\frac{2}{x^4}\right)}{x} = +\infty$$

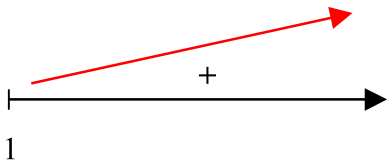
non esistono quindi asintoti obliqui .

5. Derivata 1^ : $$f(x) = \begin{cases} x^4 - x^3 - 2 & se \quad x \geq 1 \\ -x^4 + x^3 - 2 & se \quad x < 1 \end{cases}$$

$$f'(x) = \begin{cases} 4x^3 - 3x^2 & se \quad x \geq 1 \\ -4x^3 + 3x^2 & se \quad x < 1 \end{cases}$$

Per $\boxed{x \geq 1}$

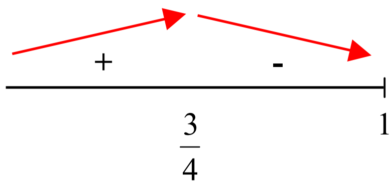
$$f'(x) > 0 \quad \Rightarrow \quad 4x^3 - 3x^2 > 0 \quad \Rightarrow \quad x > \frac{3}{4}$$



$$f(1) = -2 \quad \Rightarrow \quad P_1(\,1\,, -2\,) \quad \min.\,relativo$$

Per $\boxed{x < 1}$

$$f'(x) > 0 \quad \Rightarrow \quad -4x^3 + 3x^2 > 0 \quad \Rightarrow \quad x < \frac{3}{4}$$



$$f\left(\frac{3}{4}\right) = -\frac{485}{256} \quad \Rightarrow \quad P_2\left(\,\frac{3}{4}\,, -\frac{485}{256}\,\right) \quad \max.\,relativo$$

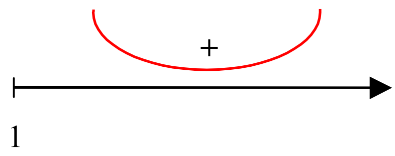
6. Derivata 2^ :

$$f'(x) = \begin{cases} 4x^3 - 3x^2 & se \quad x \geq 1 \\ -4x^3 + 3x^2 & se \quad x < 1 \end{cases}$$

$$f''(x) = \begin{cases} 12x^2 - 6x & se \quad x \geq 1 \\ -12x^2 + 6x & se \quad x < 1 \end{cases}$$

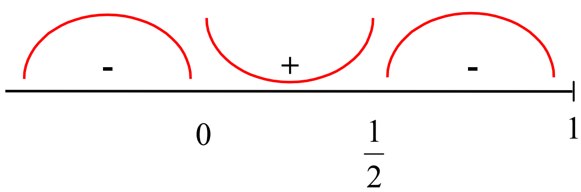
Per $\boxed{x \geq 1}$

$$f''(x) > 0 \quad \Rightarrow \quad 12x^2 - 6x > 0 \Rightarrow \quad x < 0 \quad , \quad x > \frac{1}{2}$$



Per $\boxed{x < 1}$

$$f''(x) > 0 \quad \Rightarrow \quad -12x^2 + 6x > 0 \quad \Rightarrow \quad 0 < x < \frac{1}{2}$$



$$f(0) = -2 \quad \Rightarrow \quad P_4(\,0\,, -2\,) \quad \textit{flesso}$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{31}{16} \quad \Rightarrow \quad P_3\left(\frac{1}{2}, -\frac{31}{16}\right) \quad \textit{flesso}$$

E quindi il grafico :