1. Sia f_k l'endomorfismo di R^3 rappresentato rispetto alla base canonica di R^3 dalla matrice

$$A_K = \begin{pmatrix} 2 & k & k-2 \\ k+1 & 1 & 2k-1 \\ 0 & k & -k \end{pmatrix}$$

a) determinare *k* tale che f_k abbia 2 come autovalore

b) per i valori di *k* trovati , studiare i corrispondenti endomorfismi determinandone Immagine , Nucleo , autovalori e autospazi .

a) Ricordando la definizione di autovalore di una matrice , sostituendo $\lambda = 2$ e impostando la relazione $|A - \lambda I| = 0$, si ha che :

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & k & k-2 \\ k+1 & 1-\lambda & 2k-1 \\ 0 & k & -k-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 0 & k & k-2 \\ k+1 & -1 & 2k-1 \\ 0 & k & -k-2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -(k+1)(-k^2-2k-k^2+2k) = 0$$

$$-(k+1)(-2k^2) = 0 \quad \Rightarrow \quad \left| \begin{array}{l} k_1 = -1 \\ k_2 = 0 \end{array} \right.$$

b-1) Per $k = -1$ la matrice associata in base canonica all'endomorfismo di R^3 è :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -3 \\ 0 & +1 & -3 \\ 0 & -1 & +1 \end{pmatrix}$$

Dalla base canonica $B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \in \Re^3$, l'**ImA** è data da :

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -3 \\ 0 & +1 & -3 \\ 0 & -1 & +1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -3 \\ 0 & +1 & -3 \\ 0 & -1 & +1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ +1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -3 \\ 0 & +1 & -3 \\ 0 & -1 & +1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ +1 \end{pmatrix}$$

$$\textbf{ImA} = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ +1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ +1 \end{pmatrix} \right\} \in \Re^3$$

Poichè la **Dim**$\mathbf{ImA}$ **= 3** ($r(A_k) = 3$) , di conseguenza si ha che **Ker**$\boldsymbol{A}$ **=** $\boldsymbol{\Phi}$

Per il calcolo degli autovalori $|A - \lambda I| = 0$, si ha che :

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 & -3 \\ 0 & 1-\lambda & -3 \\ 0 & -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad (2-\lambda)(\lambda^2 - 2\lambda - 2) = 0 \quad \Rightarrow \quad \left| \begin{array}{l} \lambda_1 = 2 \\ \lambda_2 = 1-\sqrt{3} \\ \lambda_3 = 1+\sqrt{3} \end{array} \right.$$

e per i relativi autospazi , $AX = \lambda X$, si ha :

$$\lambda_1 = 2 \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} 2 & -1 & -3 \\ 0 & +1 & -3 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} -y-3z=0 \\ -y-3z=0 \\ -y-z=0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} z=0 \\ y=0 \end{cases} \quad \textbf{Autospazio}$$

$$\lambda_2 = 1-\sqrt{3} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} 2 & -1 & -3 \\ 0 & +1 & -3 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = (1-\sqrt{3})\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} (1+\sqrt{3})x - y - 3z = 0 \\ \sqrt{3}y - 3z = 0 \\ -y + \sqrt{3}z = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x = \sqrt{3}z \\ y = \sqrt{3}z \end{cases}$$

Autospazio

$$\lambda_2 = 1+\sqrt{3} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} 2 & -1 & -3 \\ 0 & +1 & -3 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = (1+\sqrt{3})\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} (1-\sqrt{3})x - y - 3z = 0 \\ -\sqrt{3}y - 3z = 0 \\ -y - \sqrt{3}z = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x = -\sqrt{3}z \\ y = -\sqrt{3}z \end{cases}$$

Autospazio

b-2) Per $k = 0$ la matrice associata in base canonica all'endomorfismo di R^3 è :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Dalla base canonica $B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \in \Re^3$, l'**ImA** è data da :

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{ImA} = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \in \Re^3$$

Poichè la **DimIm*A* = 2** ($r(A_k) = 2$) , di conseguenza si ha che **DimKer*A* = 1**

Infatti si ha che : $KerA \quad \Rightarrow \quad A \cdot X = 0$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} 2x - 2z = 0 \\ x + y - z = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x = z \\ y = 0 \end{cases}$$

da cui : $KerA = \left\{ \begin{pmatrix} z \\ 0 \\ z \end{pmatrix} \right\}$.

Per il calcolo degli autovalori $|A-\lambda I|=0$, si ha che :

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & -2 \\ 1 & 1-\lambda & -1 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad -\lambda(2-\lambda)(1-\lambda)=0 \quad \Rightarrow \quad \begin{vmatrix} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 2 \\ \lambda_3 = 1 \end{vmatrix}$$

e per i relativi autospazi , $AX=\lambda X$, si ha :

$$\lambda_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} 2x-2z=0 \\ x+y-z=0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} y=0 \\ x-z=0 \end{cases} \quad \textbf{Autospazio}$$

$$\lambda_2 = 2 \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} -2z=0 \\ x-y-z=0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} z=0 \\ x-y=0 \end{cases} \quad \textbf{Autospazio}$$

$$\lambda_2 = 1 \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 1\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x-2z=0 \\ x-z=0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x=0 \\ z=0 \end{cases} \quad \textbf{Autospazio}$$

2. Studiare la funzione e disegnarne il grafico

$$\boxed{f(x)=\operatorname{arctg}2x-\operatorname{arctg}x}$$

1. Dominio : $\boxed{\forall x \in \Re}$

2. Intersezione assi :

$$\begin{cases} y = \operatorname{arctg} 2x - \operatorname{arctg} x \\ x = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} y = 0 \\ x = 0 \end{cases}$$

3. Limiti :

$$\lim_{x \to -\infty} \operatorname{arctg} 2x - \operatorname{arctg} x = 0$$

$$\lim_{x \to +\infty} \operatorname{arctg} 2x - \operatorname{arctg} x = 0$$

4. Asintoti :

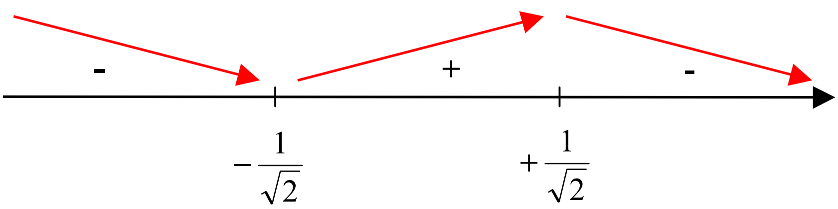
Asintoto orizzontale $\boxed{y = 0}$

5. Derivata 1^ :

$$f'(x) = \frac{2}{1+4x^2} - \frac{1}{1+x^2}$$

$$f'(x) = \frac{2(1+x^2) - 1 - 4x^2}{(1+4x^2)(1+x^2)} = \frac{-2x^2+1}{(1+4x^2)(1+x^2)}$$

$$f'(x) > 0 \quad \Rightarrow \quad 1 - 2x^2 > 0 \quad \Rightarrow \quad -\frac{1}{\sqrt{2}} < x < +\frac{1}{\sqrt{2}}$$



$$f\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=-0{,}34 \quad\Rightarrow\quad P\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},-0{,}34\right) \quad \min.\,assoluto$$

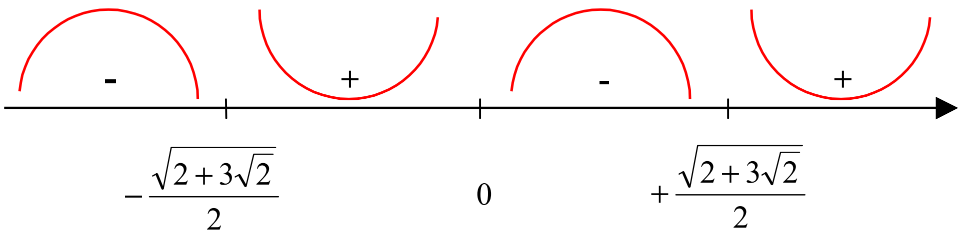
$$f\left(+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=0{,}34 \quad\Rightarrow\quad P\left(+\frac{1}{\sqrt{2}},0{,}34\right) \quad \max.\,assoluto$$

6. Derivata 2^ :

$$f''(x)=\frac{-4x(1+4x^2)(1+x^2)-(1-2x^2)[8x(1+x^2)+2x(1+4x^2)]}{(1+4x^2)^2(1+x^2)^2}$$

$$f''(x)=\frac{-4x(4x^4+5x^2+1)-(1-2x^2)(16x^3+10x)}{(1+4x^2)^2(1+x^2)^2}=\frac{16x^5-16x^3-14x}{(1+4x^2)^2(1+x^2)^2}=\frac{2x(8x^4-8x^2-7)}{(1+4x^2)^2(1+x^2)^2}$$

$$f''(x)>0 \quad\Rightarrow\quad x(8x^4-8x^2-7)>0 \quad\Rightarrow\quad -\frac{\sqrt{2+3\sqrt{2}}}{2}<x<+0 \quad , \quad x>+\frac{\sqrt{2+3\sqrt{2}}}{2}$$



E quindi il grafico :