Studiare la seguente funzione (è richiesto lo studio di f ''(x) e la ricerca degli eventuali asintoti obliqui) :

$$f(x)=1-\ln\frac{x^2-4}{x^2-9}$$

1. Dominio : $\forall x\in\Re:\frac{x^2-4}{x^2-9}>0 \quad\Rightarrow\quad x<-3 \quad , \quad -2<x<+2 \quad , \quad x>+3$

Poichè la funzione è **pari** , lo studio viene limitato al semipiano delle ascisse positive $\left(x\geq 0 \right)$

2. Intersezione assi :

$$\begin{cases} y=1-\ln\frac{x^2-4}{x^2-9} \\ x=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=1-\ln\frac{4}{9} \\ x=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y=1-\ln\frac{x^2-4}{x^2-9} \\ y=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1-\ln\frac{x^2-4}{x^2-9}=0 \\ y=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \ln\frac{x^2-4}{x^2-9}=\ln e \\ y=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (1-e)x^2=4-9e \\ y=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=+\sqrt{\frac{9e-4}{e-1}} \\ y=0 \end{cases}$$

3. Segno *f(x) > 0* :

$$1-\ln\frac{x^2-4}{x^2-9}>0 \quad\Rightarrow\quad \frac{x^2-4}{x^2-9}<e \quad\Rightarrow\quad \frac{(e-1)x^2+4-9e}{x^2-9}>0$$

$$\Rightarrow\quad 0<x<2 \quad , \quad x>+\sqrt{\frac{9e-4}{e-1}}$$

4. Limiti :

$$\lim_{x \to 2^-} 1 - \ln\frac{x^2-4}{x^2-9} = +\infty$$

$$\lim_{x \to 3^+} 1 - \ln\frac{x^2-4}{x^2-9} = -\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} 1 - \ln\frac{x^2-4}{x^2-9} = 1 - \lim_{x \to +\infty} \ln\left[\frac{x^2\left(1-\frac{4}{x^2}\right)}{x^2\left(1-\frac{9}{x^2}\right)}\right] = 1$$

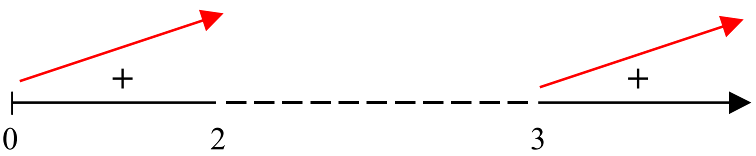
5. Asintoti :

$\boxed{x=2}$, $\boxed{x=3}$ **Asintoto verticale** $\boxed{y=1}$ **Asintoto orizzontale**

6. Derivata 1^ :

$$f'(x) = \frac{-\dfrac{2x\left(x^2-9\right)-2x\left(x^2-4\right)}{\left(x^2-9\right)^2}}{\dfrac{\left(x^2-4\right)}{\left(x^2-9\right)}} = \frac{10x}{\left(x^2-9\right)\left(x^2-4\right)}$$

$$f'(x) > 0 \qquad \forall\, x \in \Re : 0 < x < 2 \quad , \quad x > 3$$



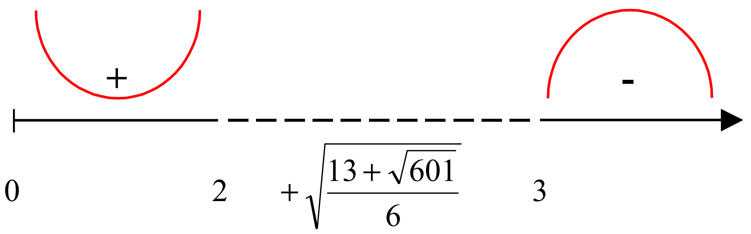
$$f(0) = 1 - \ln\frac{4}{9} \quad \Rightarrow \quad P\left(\ 0\ , 1 - \ln\frac{4}{9}\ \right) \quad \max.\ relativo$$

6. Derivata 2^ :

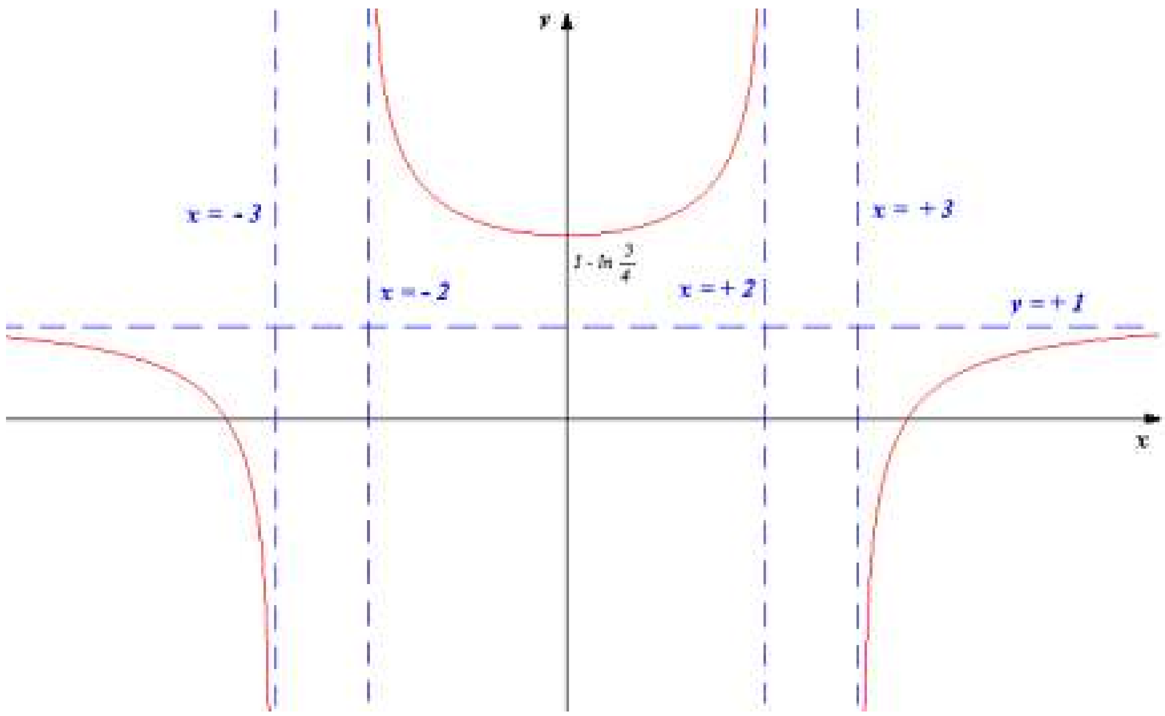
Allo stesso modo :

$$f''(x) = \frac{10(x^2-9)(x^2-4) - 10x\left[2x(x^2-4) + 2x(x^2-9)\right]}{(x^2-9)^2(x^2-4)^2} = \frac{-10(3x^4-13x^2-36)}{(x^2-9)^2(x^2-4)^2}$$

$$f''(x) > 0 \qquad 3x^4 - 13x^2 - 36 < 0 \Rightarrow -\sqrt{\frac{13+\sqrt{601}}{6}} < x < +\sqrt{\frac{13+\sqrt{601}}{6}}$$



E il grafico :



Discutere al variare del parametro *b* il seguente sistema lineare :

$$\begin{cases} 7x-3y+5z+t=(b+1)^2 \\ x-y+z+t=b+1 \\ 2(b+1)x-(b+1)y+(b+2)z+(b+1)^2t=3(b+1) \end{cases}$$

Dalla matrice incompleta ,

$$A_I=\begin{pmatrix} 7 & -3 & +5 & +1 \\ 1 & -1 & +1 & +1 \\ 2b+2 & -b-1 & b+2 & (b+1)^2 \end{pmatrix}$$

scelto un minore di ordine 3 e calcolando il determinante :

$$A_3=\begin{pmatrix} 7 & -3 & +5 \\ 1 & -1 & +1 \\ 2b+2 & -b-1 & b+2 \end{pmatrix} \quad , \quad \det A_3=\begin{vmatrix} 7 & -3 & +5 \\ 1 & -1 & +1 \\ 2b+2 & -b-1 & b+2 \end{vmatrix}=2(b-1)$$

1) se $b \neq 1$ il sistema ammette $\infty^{4-3}=\infty^1$ soluzioni , poichè $r(A_I)=r(A_C)=3$

2) se $b=1$, sostituendo in A_C , e portando la matrice a forma ridotta :

$$A_C=\begin{pmatrix} 7 & -3 & +5 & +1 & 4 \\ 1 & -1 & +1 & +1 & 2 \\ 4 & -2 & +3 & +4 & 6 \end{pmatrix} \underset{2^\wedge_r \leftrightarrow 1^\wedge_r}{\cong} \begin{pmatrix} 1 & -1 & +1 & +1 & 2 \\ 7 & -3 & +5 & +1 & 4 \\ 4 & -2 & +3 & +4 & 6 \end{pmatrix} \underset{\substack{2^\wedge_r \to 2^\wedge_r-7\cdot 1^\wedge_r \\ 3^\wedge_r \to 3^\wedge_r-4\cdot 1^\wedge_r}}{\cong} \begin{pmatrix} 1 & -1 & +1 & +1 & 2 \\ 0 & +4 & -2 & -6 & -10 \\ 0 & +2 & -1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \underset{3^\wedge_r \to 2\cdot 3^\wedge_r-2^\wedge_r}{\cong}$$

$$\cong \begin{pmatrix} 1 & -1 & +1 & +1 & 2 \\ 0 & +4 & -2 & -6 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & +6 & +6 \end{pmatrix}$$

e quindi poichè $r(A_I)=r(A_C)=3$, il sistema ammette ancora $\infty^{4-3}=\infty^1$ soluzioni .

Riassumendo $\forall\, b \in \Re$ il sistema ammette $\infty^{4-3}=\infty^1$ soluzioni .

Calcolare l'ordine del seguente infinitesimo per $x \to 0$:

$$\frac{\ln\left(1+\operatorname{sen} x^2\right)\left(e^x-\cos\sqrt{x^3}\right)}{\sqrt[4]{3x^3}}$$

Ricordando gli sviluppi in serie di Mac-Laurin :

$$\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots\ldots$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots\ldots$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots\ldots$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3} + \ldots\ldots$$

si ha , ricordando la definizione di ordine di un infinitesimo , che :

$$f(x) = \frac{\ln\left(1+\operatorname{sen} x^2\right)\left(e^x-\cos\sqrt{x^3}\right)}{\sqrt[4]{3x^3}\cdot x^\alpha} = \frac{\left(x^2+o\left(x^3\right)\right)\left(1+x+\frac{x^2}{2!}+o\left(x^2\right)-1+\frac{x^3}{2!}+o(x^5)\right)}{3x^{\frac{3}{4}+\alpha}}$$

$$f(x) = \frac{x^3+o\left(x^4\right)}{3x^{\frac{3}{4}+\alpha}}$$

e dunque l'ordine di infinitesimo α è dato dalla risoluzione dell'equazione :

$$\frac{3}{4}+\alpha = 3 \quad \Rightarrow \quad \alpha = \frac{9}{4} \ .$$

Allo stesso risultato si poteva arrivare mediante l'utilizzo dei limiti notevoli .

Ricordando che : $\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}x}{x}=1$, $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2}$, $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$, $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(1+\operatorname{sen}x^2\right)\left(e^x-\cos\sqrt{x^3}\right)}{\sqrt[4]{3x^3}\cdot x^\alpha}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\ln\left(1+\operatorname{sen}x^2\right)}{\operatorname{sen}x^2}\cdot\frac{\operatorname{sen}x^2}{x^2}\cdot x^2\left(\frac{e^x-1}{x}\cdot x+\frac{1-\cos\sqrt{x^3}}{x^3}\cdot x^3\right)}{\sqrt[4]{3x^3}\cdot x^\alpha}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^3+o\left(x^4\right)}{3x^{\frac{3}{4}+\alpha}}=\frac{1}{3}\qquad\Leftrightarrow\qquad\alpha=\frac{9}{4}$$