1. **Studiare e rappresentare graficamente la funzione (è richiesto lo studio di eventuali asintoti obliqui e della derivata seconda) :**

$$\boxed{f(x) = x + \sqrt{2x^2 + 5x - 3} - 1}$$

1. **Dominio :** $D: \quad \forall x \in \Re: \quad 2x^2 + 5x - 3 \geq 0 \quad \Rightarrow \quad x \leq -3 \quad ; \quad x \geq +\frac{1}{2}$

2. **Intersezioni con gli assi :**

$$\begin{cases} y = x + \sqrt{2x^2 + 5x - 3} - 1 \\ y = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x + \sqrt{2x^2 + 5x - 3} - 1 = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -x + 1 = \sqrt{2x^2 + 5x - 3} \\ y = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad posto \quad x < 1 \quad \Rightarrow \quad (-x+1)^2 = 2x^2 + 5x - 3$$

$$\begin{cases} x^2 + 7x - 4 = 0 \\ y = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x_1 = \dfrac{-7 - \sqrt{65}}{2} \\ y = 0 \end{cases} \quad ; \quad \begin{cases} x_2 = \dfrac{-7 + \sqrt{65}}{2} \\ y = 0 \end{cases}$$

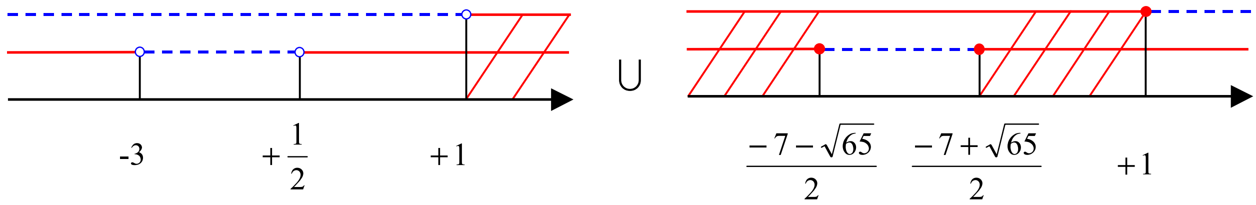
3. **Studio del segno :** $f(x) > 0 \quad \Rightarrow \quad x + \sqrt{2x^2 + 5x - 3} - 1 > 0$

$$\sqrt{2x^2 + 5x - 3} > -x + 1$$

$$\begin{cases} -x + 1 \leq 0 \\ 2x^2 + 5x - 3 \geq 0 \end{cases} \quad \cup \quad \begin{cases} -x + 1 > 0 \\ 2x^2 + 5x - 3 > (-x+1)^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \ge 1 \\ x \le -3 \quad ; \quad x \ge +\dfrac{1}{2} \end{cases} \quad \cup \quad \begin{cases} x < 1 \\ x^2 + 7x - 4 > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \ge 1 \\ x \le -3 \quad ; \quad x \ge +\dfrac{1}{2} \end{cases} \quad \cup \quad \begin{cases} x < 1 \\ x < \dfrac{-7-\sqrt{65}}{2} \quad ; \quad x > \dfrac{-7+\sqrt{65}}{2} \end{cases}$$



4. Calcolo dei limiti :

$$\lim_{x\to-\infty} x + \sqrt{2x^2+5x-3} - 1 = (-\infty + \infty)$$

$$\lim_{x\to-\infty} x - x\sqrt{2+\frac{5}{x}-\frac{3}{x^2}} - 1 \quad = \quad \lim_{x\to-\infty} x\left(1-\sqrt{2+\frac{5}{x}-\frac{3}{x^2}}-\frac{1}{x}\right) \quad = \quad +\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} x + \sqrt{2x^2+5x-3} - 1 \quad = \quad +\infty$$

5. Asintoti : verifichiamo l'esistenza di asintoti obliqui ($y = mx + q$)

$$m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} \qquad \text{per} \quad x \to +\infty$$

$$m = \lim_{x\to+\infty} \frac{x + \sqrt{2x^2 + 5x - 3} - 1}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x\left(1 + \sqrt{2 + \frac{5}{x} - \frac{3}{x^2}} - \frac{1}{x}\right)}{x} = \quad 1 + \sqrt{2}$$

$$q = \lim_{x\to+\infty} f(x) - mx$$

$$q = \lim_{x\to+\infty} x + \sqrt{2x^2 + 5x - 3} - \left(1 + \sqrt{2}\right)x = \lim_{x\to+\infty} \sqrt{2x^2 + 5x - 3} - \sqrt{2}x =$$

$$q = \lim_{x\to+\infty} \frac{\left[\sqrt{2x^2 + 5x - 3} - \sqrt{2}x\right]\cdot\left[\sqrt{2x^2 + 5x - 3} + \sqrt{2}x\right]}{\left[\sqrt{2x^2 + 5x - 3} + \sqrt{2}x\right]} =$$

$$q = \lim_{x\to+\infty} \frac{\left(\sqrt{2x^2 + 5x - 3}\right)^2 - \left(\sqrt{2}x\right)^2}{\left[\sqrt{2x^2 + 5x - 3} + \sqrt{2}x\right]} = \lim_{x\to+\infty} \frac{5x - 3}{\left[x\sqrt{2 + \frac{5}{x} - \frac{3}{x^2}} + \sqrt{2}x\right]} =$$

$$q = \lim_{x\to+\infty} \frac{x\left(5 - \frac{3}{x}\right)}{x\left(\sqrt{2 + \frac{5}{x} - \frac{3}{x^2}} + \sqrt{2}\right)} = \frac{5}{2\sqrt{2}}$$

da cui l'asintoto : $\boxed{y = \left(1 + \sqrt{2}\right)x + \left(\frac{5}{2\sqrt{2}}\right)}$

$$m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} \qquad \text{per} \quad x \to -\infty$$

$$m = \lim_{x\to-\infty} \frac{x + \sqrt{2x^2 + 5x - 3} - 1}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x\left(1 - \sqrt{2 + \frac{5}{x} - \frac{3}{x^2}} - \frac{1}{x}\right)}{x} = 1 - \sqrt{2}$$

$$q = \lim_{x \to -\infty} \; f(x) - mx$$

$$q = \lim_{x \to -\infty} \; x + \sqrt{2x^2 + 5x - 3} - 1 - \left(1 - \sqrt{2}\right)x = \lim_{x \to -\infty} \; \sqrt{2x^2 + 5x - 3} + \sqrt{2}x =$$

$$q = \lim_{x \to -\infty} \frac{\left[\sqrt{2x^2 + 5x - 3} + \sqrt{2}x\right] \cdot \left[\sqrt{2x^2 + 5x - 3} - \sqrt{2}x\right]}{\left[\sqrt{2x^2 + 5x - 3} - \sqrt{2}x\right]} =$$

$$q = \lim_{x \to -\infty} \frac{2x^2 + 5x - 3 - 2x^2}{\left[\sqrt{2x^2 + 5x - 3} - \sqrt{2}x\right]} = \lim_{x \to -\infty} \frac{5x - 3}{\left[\sqrt{2x^2 + 5x - 3} - \sqrt{2}x\right]} =$$

$$q = \lim_{x \to -\infty} \frac{x\left(5 - \dfrac{3}{x}\right)}{x\left[-\sqrt{2 + \dfrac{5}{x} - \dfrac{3}{x^2}} - \sqrt{2}\right]} = -\frac{5}{2\sqrt{2}}$$

da cui l'asintoto : $\boxed{y = \left(1 - \sqrt{2}\right)x + \left(-\dfrac{5}{2\sqrt{2}}\right)}$

6. Derivata 1^ :

$$f'(x) \;=\; 1 + \frac{4x + 5}{2\sqrt{2x^2 + 5x - 3}} \;=\; \frac{2\sqrt{2x^2 + 5x - 3} + 4x + 5}{\sqrt{8x^2 + 20x - 12}}$$

Per $f'(x) > 0 \qquad 2\sqrt{2x^2 + 5x - 3} > -4x - 5 \quad \Rightarrow \quad x > -3$

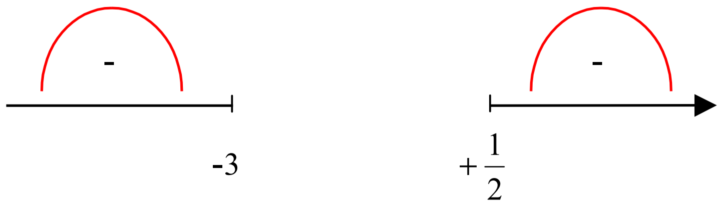
Per la risoluzione della disequazione irrazionale vedi lez. 4 (radicali)

$f(-3) = -4 \qquad , \qquad f\left(+\dfrac{1}{2}\right) = -\dfrac{1}{2}$

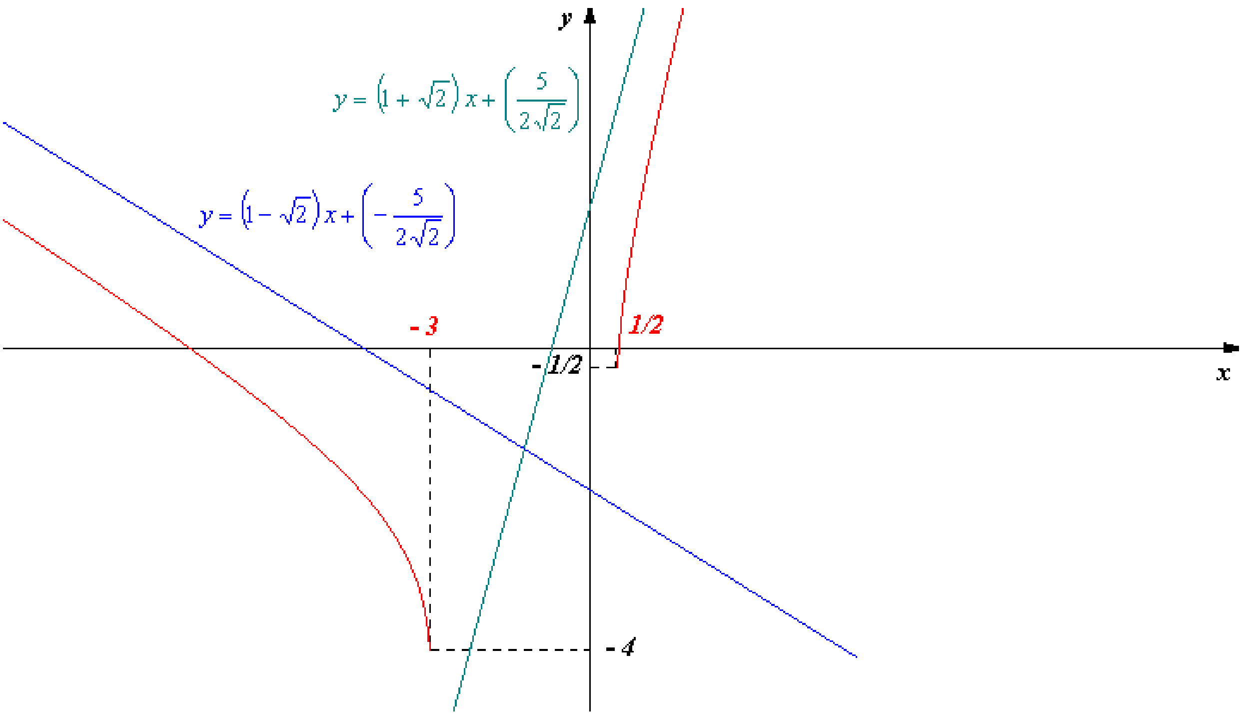
7. Derivata 2^ :

$$f''(x) \;=\; \frac{8\sqrt{2x^2+5x-3}-\dfrac{(4x+5)^2}{\sqrt{2x^2+5x-3}}}{\left(2\sqrt{2x^2+5x-3}\right)^2} \;=\; \frac{-49}{4\sqrt{\left(2x^2+5x-3\right)^3}}$$

Per $f''(x)>0 \qquad \forall x\in\Re$



Il grafico della funzione :



2. **Risolvere al variare del parametro reale *a* il sistema lineare :**

$$\begin{cases} 2x+(a+1)y+z=1 \\ 3x+(a+3)y+z=0 \\ x-y+z=2 \\ (a+1)y+y+z=0 \end{cases}$$

<u>Svolgimento</u> :

Calcoliamo il determinante della matrice completa del sistema :

$$A_C = \begin{vmatrix} 2 & (a+1) & 1 & 1 \\ 3 & (a+3) & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & (a+1) & 1 & 0 \end{vmatrix} \approx \underset{3^\wedge_r \to 3^\wedge_r - 2\cdot 1^\wedge_r}{\begin{vmatrix} 2 & (a+1) & 1 & 1 \\ 3 & (a+3) & 1 & 0 \\ -3 & -3-2a & -1 & 0 \\ 1 & (a+1) & 1 & 0 \end{vmatrix}} = -1 \begin{vmatrix} 3 & a+3 & 1 \\ -3 & -3-2a & -1 \\ 1 & a+1 & 1 \end{vmatrix} = 2a$$

Per le operazioni eseguite vedere lez. 2 (matrici)

Discussione :

a) Se $2a \neq 0 \quad \Rightarrow \quad a \neq 0$ il sistema non ammette soluzioni , poiché $r(A_C) = 4 \quad \neq \quad r(A_I) \leq 3$.

b) Se $a = 0$ il sistema diventa :

$$\begin{cases} 2x+y+z=1 \\ 3x+3y+z=0 \\ x-y+z=2 \\ x+y+z=0 \end{cases}$$ e portando la matrice completa a forma ridotta :

$$A_C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \underset{3^\wedge_r \leftrightarrow 1^\wedge_r}{\cong} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \underset{\substack{2^\wedge_r \to 2^\wedge_r - 3\cdot 1^\wedge_r \\ 3^\wedge_r \to 3^\wedge_r - 2\cdot 1^\wedge_r \\ 4^\wedge_r \to 4^\wedge_r - 1^\wedge_r}}{\cong} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 6 & -2 & -6 \\ 0 & 3 & -1 & -3 \\ 0 & 2 & 0 & -2 \end{pmatrix} \underset{\substack{3^\wedge_r \to 2\cdot 3^\wedge_r - 2^\wedge_r \\ 4^\wedge_r \to 3\cdot 4^\wedge_r - 2^\wedge_r}}{\cong} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 6 & -2 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \underset{4^\wedge_r \leftrightarrow 3^\wedge_r}{\cong} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 6 & -2 & -6 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

il sistema equivalente risulta quindi :

$$\begin{cases} x - y + z = 2 \\ \quad 6y - 2z = -6 \\ \qquad +2z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = -1 \\ z = 0 \end{cases}$$ il sistema ammette una sola soluzione .

2. Discutere al variare del parametro reale *k* le soluzioni dell'equazione :

$$4x - e^{2x} + 1 - k = 0$$

<u>Svolgimento</u> :

Si tratta di trovare gli zeri della relativa funzione .

$$f(x) = 4x - e^{2x} + 1 - k$$

1. **<u>Dominio</u> :** $D: \quad \forall x \in \Re$

2. **<u>Calcolo dei limiti</u> :**

$$\lim_{x \to -\infty} 4x - e^{2x} + 1 - k = -\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} 4x - e^{2x} + 1 - k = (-\infty + \infty) \Rightarrow \lim_{x \to +\infty} x\left(4 - \frac{e^{2x}}{x} + \frac{1}{x} - \frac{k}{x}\right) =$$

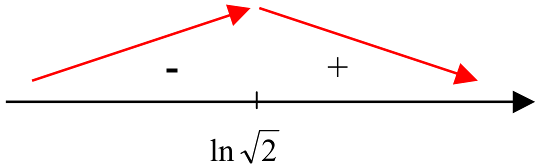
$$\lim_{x \to +\infty} x \cdot \left(4 - H \lim_{x \to +\infty} \frac{e^{2x}}{x} + \lim_{x \to +\infty} \frac{1-k}{x}\right) = \lim_{x \to +\infty} x \cdot \left(4 - \lim_{x \to +\infty} \frac{2e^{2x}}{1} + \lim_{x \to +\infty} \frac{1-k}{x}\right) = -\infty$$

3. Derivata 1^ :

$$f'(x) = 4 - 2e^{2x}$$

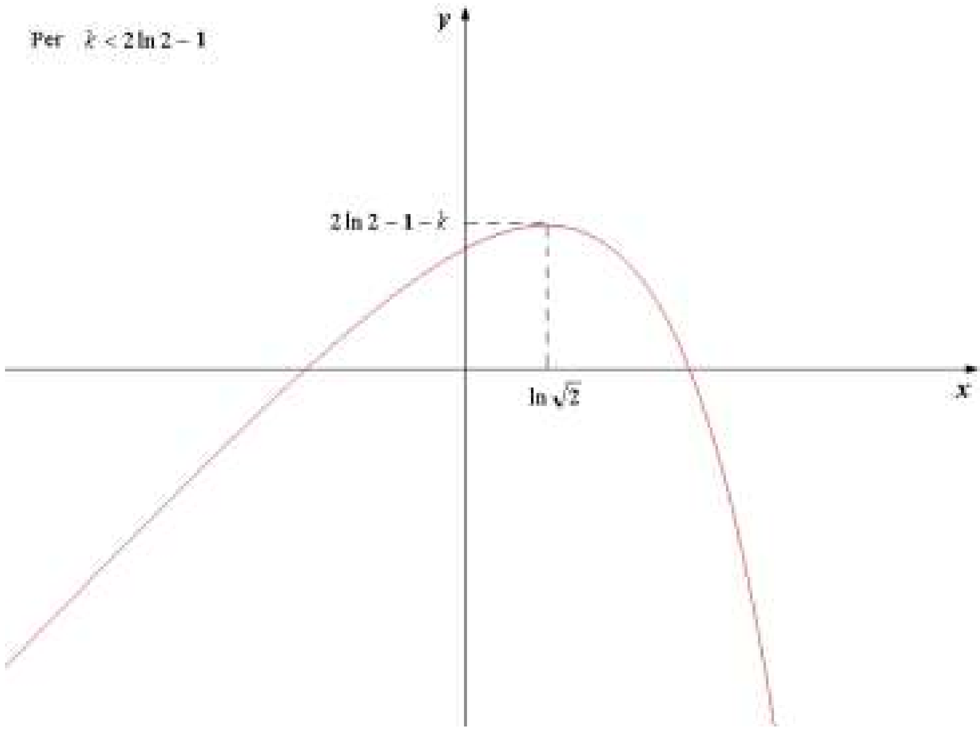
Per $f'(x) > 0 \qquad 4 - 2e^{2x} > 0 \;\Rightarrow\; e^{2x} < 2 \;\Rightarrow\; x < \ln\sqrt{2}$

Per la risoluzione della disequazione esponenziale vedi lez. 6 (algebra di base)

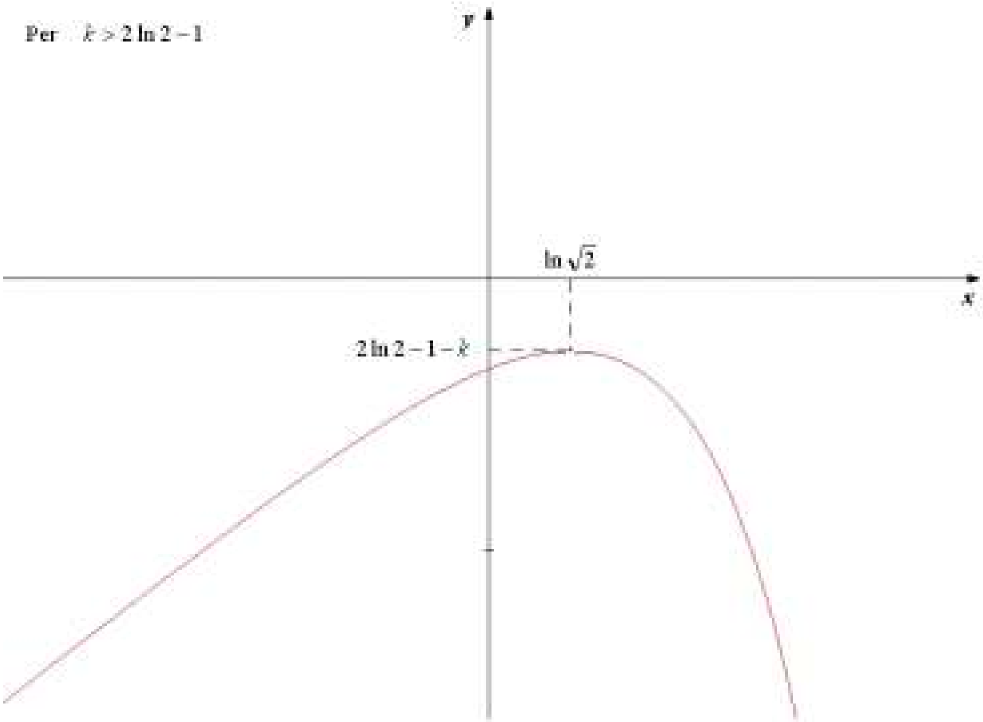


$$f\left(\ln\sqrt{2}\right) = 2\ln 2 - 1 - k$$

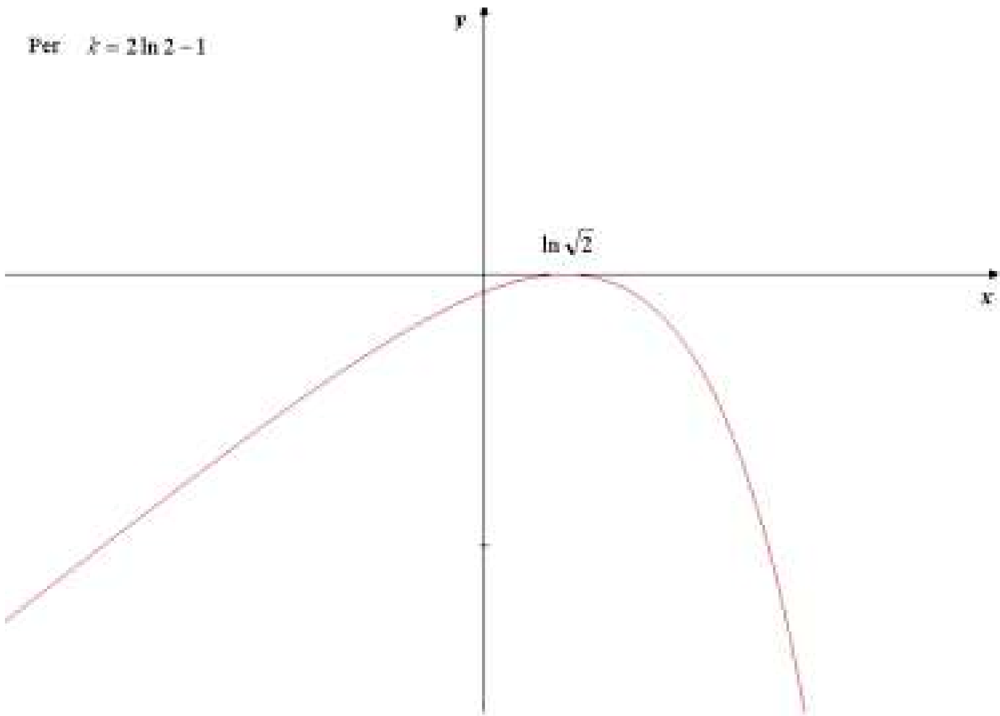
I grafici relativi della funzione :



Si hanno quindi 2 soluzioni reali e distinte.



Non esistono quindi soluzioni.



Si hanno quindi 2 soluzioni reali e coincidenti.