Studiare e tracciare il grafico della seguente funzione (è richiesto lo studio della derivata seconda e di eventuali asintoti obliqui) .

$$f(x) = 2\ln|3x-4| + \frac{(1-3x)^2}{2}$$

1. **Dominio :** $D = \{\forall x \in \Re : 3x-4 \neq 0\} \Rightarrow D = \left\{\forall x \in \Re : x \neq \frac{4}{3}\right\}$

2. **Intersezioni assi**

$$\begin{cases} y = 2\ln|3x-4| + \dfrac{(1-3x)^2}{2} \\ x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 2\ln 4 + \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2} + \ln 16 \\ x = 0 \end{cases}$$

N.B. l'intersezione con l'asse delle ascisse , così come lo studio del segno , risultano complessi (algebricamente non possibili) e quindi li trascuriamo.

4. **Limiti**

$$\lim_{x\to\frac{4}{3}} 2\ln|3x-4| + \frac{(1-3x)^2}{2} = -\infty \quad , \quad \lim_{x\to\infty} 2\ln|3x-4| + \frac{(1-3x)^2}{2} = +\infty$$

5. **Asintoti**

Asintoto Verticale : $\boxed{x = \frac{4}{3}}$

Verifica asintoti obliqui : $y = mx + q$

$$m = \lim_{x\to\infty} \frac{2\ln|3x-4| + \frac{(1-3x)^2}{2}}{x} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) \Rightarrow H \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{6}{3x-4} - 3(1-3x)}{1} = \infty$$

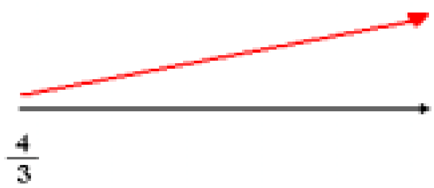
non vi sono quindi asintoti obliqui .

5. Derivata 1^ Per $\boxed{3x-4>0 \Rightarrow x > \frac{4}{3}}$

$$f'(x) = \frac{6}{3x-4} - 3(1-3x) = \frac{(27x^2-45x+18)}{3x-4} = 9\frac{(3x^2-5x+2)}{3x-4}$$

Segno derivata 1^ :

$$f'(x) > 0 \Rightarrow 3x^2 - 5x + 2 > 0 \Rightarrow x < \frac{2}{3} \quad , \quad x > 1$$

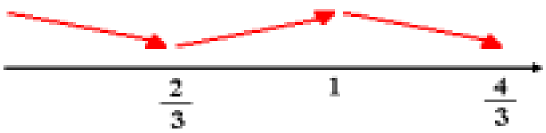


5. Derivata 1^ Per $\boxed{3x-4<0 \Rightarrow x < \frac{4}{3}}$

$$f'(x) = \frac{6}{3x-4} - 3(1-3x) = \frac{(27x^2-45x+18)}{3x-4} = 9\frac{(3x^2-5x+2)}{3x-4}$$

Segno derivata 1^ :

$$f'(x) > 0 \quad \Rightarrow \quad 3x^2 - 5x + 2 < 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{2}{3} < x < 1$$



Calcolo delle ordinate dei punti di massimo e di minimo relativo :

$$f\left(\frac{2}{3}\right) = 2\ln 2 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} + \ln 4 \qquad P_1\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{2} + \ln 4\right) \text{ minimo relativo}$$

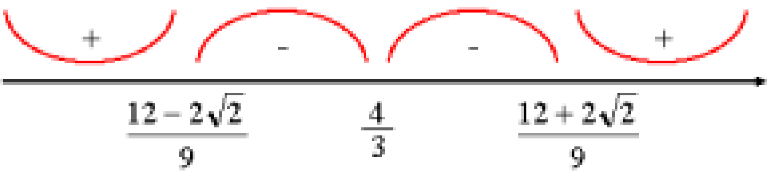
$$f(1) = 2 = \qquad P_2(1, 2) \text{ massimo relativo}$$

6. Derivata 2^

$$f''(x) = 9\frac{(6x-5)(3x-4) - 3(3x^2 - 5x + 2)}{(3x-4)^2} = 9\frac{(9x^2 - 24x + 14)}{(3x-4)^2}$$

Segno derivata 2^ :

$$f''(x) > 0 \quad \Rightarrow \quad 9x^2 - 24x + 14 > 0 \quad \Rightarrow \quad x < \frac{12 - 2\sqrt{2}}{9} \quad , \quad x > \frac{12 + 2\sqrt{2}}{9}$$

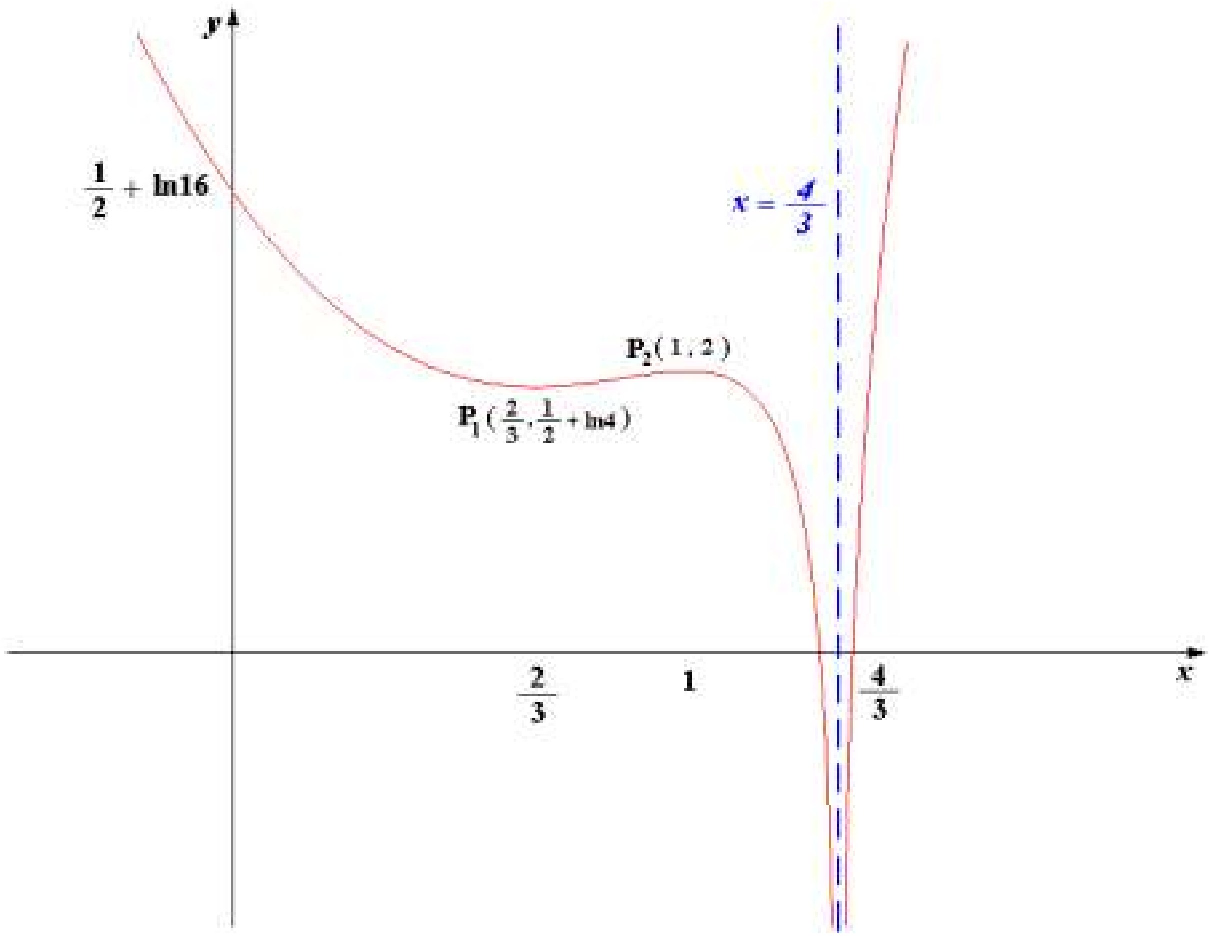


Calcolo delle ordinate dei punti di flesso :

$$f\left(\frac{12-2\sqrt{2}}{9}\right)=2\ln(3.1{,}02-4)+\frac{(1-3.1{,}02)^2}{2}=2 \qquad P_3(\ 1{,}02\ ;\ 2\ )\ \text{flesso}$$

$$f\left(\frac{12+2\sqrt{2}}{9}\right)=2\ln(3.1{,}64-4)+\frac{(1-3.1{,}64)^2}{2}=+7{,}58 \qquad P_3(\ 1{,}64\ ;\ 7{,}58\ )\ \text{flesso}$$

Il grafico :



Discutere la risolubilità del seguente sistema lineare al variare di $a, b \in \Re$.

$$\begin{cases} ax + 2ay + 2z + t = b + 1 \\ a^2 x + (a+1)y + z - 3t = b \\ 6x + 7y + 3z - 2t = 3 \end{cases}$$

Poiché $m = 3$ (equazioni) e $n = 4$ (incognite) si sceglie un minore di ordine massimo della matrice incompleta A .

$$A = \begin{pmatrix} a & 2a & 2 & 1 \\ a^2 & a+1 & 1 & -3 \\ 6 & 7 & 3 & -2 \end{pmatrix}$$

scelto ad es. $B = \begin{vmatrix} 2a & 2 & 1 \\ a+1 & 1 & -3 \\ 7 & 3 & -2 \end{vmatrix} = 21(a-2)$

Discussione:

1) Se $a - 2 \neq 0 \Rightarrow a \neq 2$ il sistema per R-C ammette ∞^1 soluzioni (poiché $r(A) = r(A_C) = 3$)

2) Se $a - 2 = 0 \Rightarrow a = 2$ sostituendo in A_C ,

$$A_C = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 2 & 1 & b+1 \\ 4 & 3 & 1 & -3 & b \\ 6 & 7 & 3 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

e scegliendo un minore di ordine massimo (contenente il parametro b) della matrice completa A :

$$B_1 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & b+1 \\ 1 & -3 & b \\ 3 & -2 & 3 \end{vmatrix} = 14(b-1)$$

da cui :

3) Se $a=2 \quad e \quad b\neq 1$ il sistema per R-C non ammette soluzioni ($r(A)=2 \quad , \quad r(A_C)=3$)

infatti , mediante Gauss :

$$A_C=\begin{pmatrix} 2 & 4 & 2 & 1 & b+1 \\ 4 & 3 & 1 & -3 & b \\ 6 & 7 & 3 & -2 & 3 \end{pmatrix} \cong \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 & 2 & b+1 \\ -3 & 3 & 1 & 4 & b \\ -2 & 7 & 3 & 6 & 3 \end{pmatrix} \cong \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 & 2 & b+1 \\ 0 & 15 & 7 & 10 & 4b+3 \\ 0 & 15 & 7 & 10 & 2b+5 \end{pmatrix} \cong$$

$$\cong \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 & 2 & b+1 \\ 0 & 15 & 7 & 10 & 4b+1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2-2b \end{pmatrix}$$

4) Se $a=2 \quad e \quad b=1$ il sistema per R-C ammette ∞^2 soluzioni ($r(A)=r(A_C)=2$)

Definire se esistono numeri reali a , b , c tali che la funzione :

$$f(x)=(a-2)x^3+c(\cos^3 x-1)-(b+1)\text{sen}\, x^3$$

risulti infinitesima di ordine 3 in $x=0$.

Svolgimento :

Applicando gli sviluppi in serie di Mac-Laurin si ha :

Per l'argomento relativo vedere lez. 6 (infinitesimi)

$$f(x)=(a-2)x^3+c\left[\left(1-\frac{x^2}{2!}+o(x^3)\right)^3-1\right]-(b+1)\left(x^3-\frac{x^9}{3!}+o(x^{14})\right)$$

$$f(x)=(a-2)x^3+c\left(-\frac{3}{2}x^2+\frac{3}{4}x^4-\frac{x^6}{8}+o(x^9)\right)-(b+1)\left(x^3-\frac{x^9}{3!}+o(x^{14})\right)$$

$$f(x)=-\frac{3}{2}cx^2+(a-b-3)x^3+\frac{3}{4}cx^4-\frac{c}{8}x^6-(b+1)\frac{x^9}{6}+o(x^{14})$$

la funzione risulta infinitesima di ordine 3 se tra tutti i monomi quello di grado minimo è di terzo grado .

Per cui si ha che :

$$\begin{cases} c = 0 \\ a - b - 3 \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c = 0 \\ a \neq b + 3 \end{cases}$$

e posto per esempio : $b = 1 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} c = 0 \\ a \neq 4 \end{cases}$.