Studiare e tracciare il grafico della seguente funzione e lo studio di eventuali asintoti obliqui.
(è richiesto lo studio della derivata seconda)

$$f(x)=\sqrt{x^2+4x+3}+(x+2)^2$$

1. **Dominio** $\forall x\in\Re : x^2+4x+3\geq 0 \quad\Rightarrow\quad x\leq -3 \quad ; \quad x\geq -1$

$f(-3)=1 \qquad ; \qquad f(-1)=1$

2. **Intersezioni assi**

$$\begin{cases} y=\sqrt{x^2+4x+3}+(x+2)^2 \\ x=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=\sqrt{3}+4 \\ x=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y=\sqrt{x^2+4x+3}+(x+2)^2 \\ y=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{x^2+4x+3}+(x+2)^2=0 \\ y=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \not\forall x\in\Re \\ y=0 \end{cases}$$

3. **Segno** $f(x)>0 \quad\Rightarrow\quad \sqrt{x^2+4x+3}+(x+2)^2>0 \quad\Rightarrow\quad \forall x\in\Re$

4. **Limiti**

$$\lim_{x\to-\infty}\sqrt{x^2+4x+3}+(x+2)^2=+\infty \qquad ; \qquad \lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+4x+3}+(x+2)^2=+\infty$$

5. **Asintoti**

Verifica asintoto obliquo : $y=mx+q$

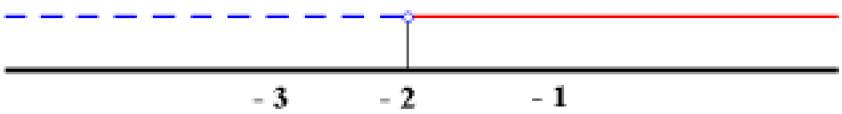
$$m = \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x^2+4x+3}+(x+2)^2}{x} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) \Rightarrow \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x^2+4x+3}}{x} + \lim_{x\to\infty} \frac{(x+2)^2}{x} = \infty$$

non vi sono quindi asintoti obliqui .

6. Derivata 1^

$$f'(x) = \frac{2x+4}{2\sqrt{x^2+4x+3}} + 2(x+2) = \frac{x+2}{\sqrt{x^2+4x+3}} + 2(x+2) = (x+2)\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+4x+3}} + 2\right)$$

Segno derivata 1^ : $\quad f'(x) > 0 \quad \Rightarrow \quad x+2>0 \quad \Rightarrow \quad x>-2$



7. Derivata 2^

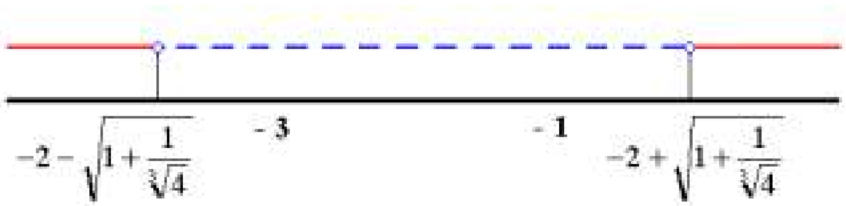
$$f''(x) = \left(\frac{1}{\sqrt{x^2+4x+3}} + 2\right) - (x+2)\frac{\frac{2x+4}{2\sqrt{x^2+4x+3}}}{x^2+4x+3} = \left(\frac{1}{\sqrt{x^2+4x+3}} + 2\right) - \frac{(x+2)^2}{\sqrt{(x^2+4x+3)^3}}$$

$$f''(x) = \frac{x^2+4x+3+2\sqrt{(x^2+4x+3)^3}-(x+2)^2}{\sqrt{(x^2+4x+3)^3}} = \frac{2\sqrt{(x^2+4x+3)^3}-1}{\sqrt{(x^2+4x+3)^3}} =$$

Segno derivata 2^ : $\quad f''(x) > 0 \quad \Rightarrow \quad 2\sqrt{(x^2+4x+3)^3}-1>0 \quad \Rightarrow \quad \sqrt{(x^2+4x+3)^3} > \frac{1}{2}$

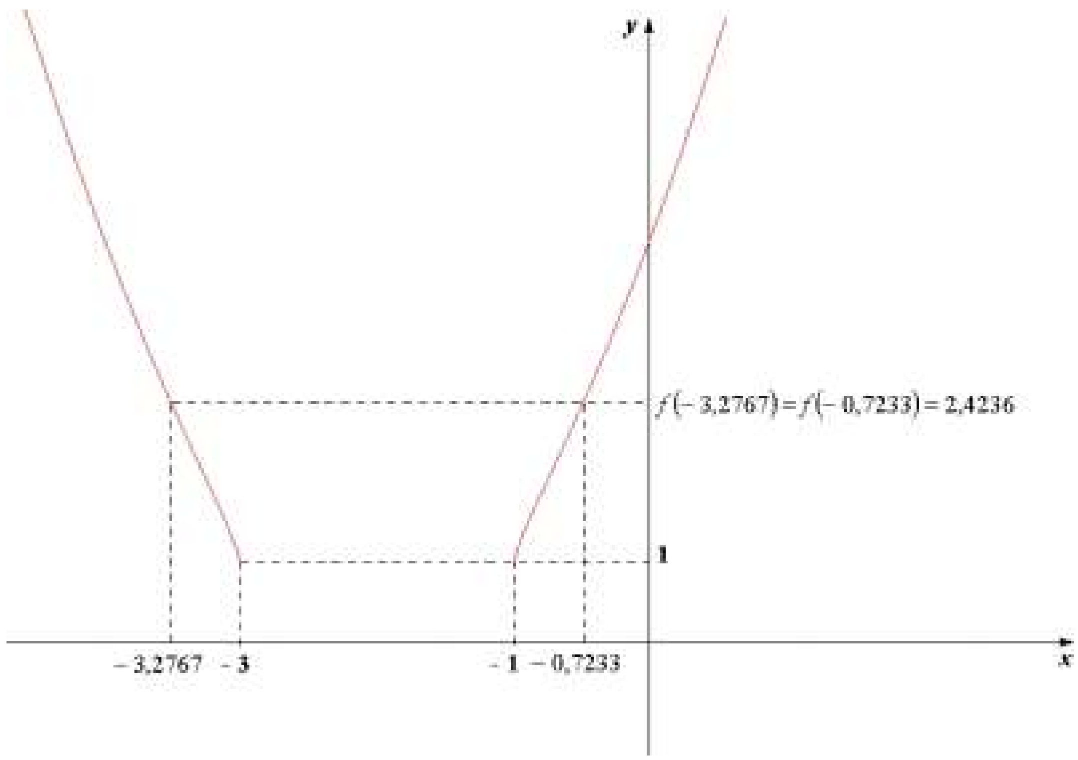
$$\sqrt{\left(x^2+4x+3\right)^3} > \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \left(x^2+4x+3\right)^3 > \frac{1}{4} \quad \Rightarrow \quad x^2+4x+3-\sqrt[3]{\frac{1}{4}} > 0$$

$$\Rightarrow \quad x < -2-\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt[3]{4}}} \quad ; \quad x > -2+\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt[3]{4}}}$$



Calcolo delle ordinate dei punti di flesso :

$$f\left(-2-\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt[3]{4}}}\right) = f(-3,2767) = 2,4236 \quad ; \quad f\left(-2+\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt[3]{4}}}\right) = f(-0,7233) = 2,4236$$



Risolvere il seguente sistema lineare al variare di $a, b \in \Re$.

$$\begin{cases} 2x + (b+1)y + (b+1)z - 3t = 0 \\ 2x + 3y + (b+1)z + (a+2)t = 0 \\ -2x + y - z + 4t = 0 \end{cases}$$

Dal minore A_1 di ordine 3 della matrice A si ha :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & b+1 & b+1 & -3 \\ 2 & 3 & b+1 & a+2 \\ -2 & 1 & -1 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow A_1 = \begin{vmatrix} 2 & b+1 & b+1 \\ 2 & 3 & b+1 \\ -2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -2b^2 + 4b = -2b(b-2)$$

Discussione .

1) Per $-2b(b-2) \neq 0 \Rightarrow b \neq 0 \quad e \quad b \neq 2 \Rightarrow r(A) = 3$ il sistema ammette ∞^1 soluzioni :

Posto $t = h$ e applicando Cramer al sistema $\begin{cases} 2x + (b+1)y + (b+1)z = 3h \\ 2x + 3y + (b+1)z = -(a+2)h \\ -2x + y - z = -4h \end{cases}$ si ha :

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 3h & b+1 & b+1 \\ -(a+2)h & 3 & b+1 \\ -4h & 1 & -1 \end{vmatrix}}{-2b(b-2)} = ...; \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 3h & b+1 \\ 2 & -(a+2)h & b+1 \\ -2 & -4h & -1 \end{vmatrix}}{-2b(b-2)} = ...; \quad z = \frac{\begin{vmatrix} 2 & b+1 & 3h \\ 2 & 3 & -(a+2)h \\ -2 & 1 & -4h \end{vmatrix}}{-2b(b-2)} = ...;$$

2) Per $b = 0$ dal minore A_2 di ordine 3 della matrice A si ha :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & -3 \\ 2 & 3 & 1 & a+2 \\ -2 & 1 & -1 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow A_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 3 & 1 & a+2 \\ 1 & -1 & 4 \end{vmatrix} = 2(a+4)$$

2-a) Per $b = 0$ e $2(a+4) \neq 0 \quad \Rightarrow \quad a \neq -4 \quad \Rightarrow \quad r(A) = 3$ il sistema ammette ∞^1 soluzioni :

Posto $x = k$ e applicando Cramer al sistema $\begin{cases} y + z - 3t = -2k \\ 3y + z + (a+2)t = -2k \\ y - z + 4t = 2k \end{cases}$ si ha :

$$y = \frac{\begin{vmatrix} -2k & 1 & -3 \\ -2k & 1 & a+2 \\ 2k & -1 & 4 \end{vmatrix}}{2(a+4)} = ...; \quad z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -2k & -3 \\ 3 & -2k & a+2 \\ 1 & 2k & 4 \end{vmatrix}}{2(a+4)} = ...; \quad t = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & -2k \\ 3 & 1 & -2k \\ 1 & -1 & 2k \end{vmatrix}}{2(a+4)} = ...;$$

2-b) Per $b = 0$ e $a = -4$ sostituendo nella matrice A e riducendo a scala si ottiene :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & -3 \\ 2 & 3 & 1 & -2 \\ -2 & 1 & -1 & 4 \end{pmatrix} \cong \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cong \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$2^\wedge_r \rightarrow 2^\wedge_r - 1^\wedge_r \qquad 3^\wedge_r \rightarrow 3^\wedge_r - 2^\wedge_r$$

$$3^\wedge_r \rightarrow 3^\wedge_r + 1^\wedge_r$$

e risolvendo il sistema :

$$\begin{cases} 2x + y + z + 3t = 0 \\ 2y + t = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x + y + z + 3t = 0 \\ t = -2y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z = 5y - 2x \\ t = -2y \end{cases}$$

con ∞^2 soluzioni : *posto* $x = h \quad , \quad y = k \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} z = 5k - 2h \\ t = -2k \end{cases}$

3) Per $b = 2$ dal minore A_3 di ordine 3 della matrice A si ha :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 & -3 \\ 2 & 3 & 3 & a+2 \\ -2 & 1 & -1 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow A_2 = \begin{vmatrix} 3 & 3 & -3 \\ 3 & 3 & a+2 \\ 1 & -1 & 4 \end{vmatrix} = 6(a+5)$$

3-a) Per $b=2$ e $6(a+5)\neq 0 \Rightarrow a\neq -5 \Rightarrow r(A)=3$ il sistema ammette ∞^1 soluzioni :

Posto $x=k$ e applicando Cramer al sistema $\begin{cases} 3y+3z-3t=-2k \\ 3y+3z+(a+2)t=-2k \\ y-z+4t=2k \end{cases}$ si ha :

$$y=\frac{\begin{vmatrix} -2k & 3 & -3 \\ -2k & 3 & a+2 \\ 2k & -1 & 4 \end{vmatrix}}{6(a+5)}=.....;\quad z=\frac{\begin{vmatrix} 3 & -2k & -3 \\ 3 & -2k & a+2 \\ 1 & 2k & 4 \end{vmatrix}}{6(a+5)}=.....;\quad t=\frac{\begin{vmatrix} 3 & 3 & -2k \\ 3 & 3 & -2k \\ 1 & -1 & 2k \end{vmatrix}}{6(a+5)}=.....;$$

3-b) Per $b=2$ e $a=-5$ sostituendo nella matrice A e riducendo a scala si ottiene :

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 & -3 \\ 2 & 3 & 3 & -3 \\ -2 & 1 & -1 & 4 \end{pmatrix}\cong\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}\cong\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 4 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} 2^\wedge{}_r \to 2^\wedge{}_r-1^\wedge{}_r \\ 3^\wedge{}_r \to 3^\wedge{}_r+1^\wedge{}_r \end{matrix} \qquad 3^\wedge{}_r \leftrightarrow +2^\wedge{}_r$$

e risolvendo il sistema :

$$\begin{cases} 2x+y+z-3t=0 \\ 4y+2z+t=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x+y+z+3t=0 \\ t=-4y-2z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z=\dfrac{2x-11y}{5} \\ t=-4y-2z \end{cases}$$

con ∞^2 soluzioni : *posto* $x=h$, $y=k \Rightarrow \begin{cases} z=\dfrac{2h-11k}{5} \\ t=\dfrac{2k-4h}{5} \end{cases}$