

7[^] Lezione

- Condizioni di parallelismo e di perpendicolarità tra due rette .
- Distanza tra due punti .
- Punto medio di un segmento .
- Distanza di un punto da una retta .
Allegato Esercizi

CONDIZIONI DI PARALLELISMO TRA DUE RETTE

Date due rette in forma cartesiana :

$$r : ax + by + c = 0$$

$$s : a_1x + b_1y + c_1 = 0$$

esse sono *parallele* se $-\frac{a}{b} = -\frac{a_1}{b_1}$ o anche

$$r \parallel s \Rightarrow \frac{a}{a_1} = \frac{b}{b_1}$$

Se le due rette sono date in forma canonica si avrà :

$$r : y = mx + q$$

$$s : y = m_1x + q_1$$

esse sono *parallele* se

$$m = m_1$$

Allo stesso modo date due rette in forma cartesiana :

$$r : ax + by + c = 0$$

$$s : a_1x + b_1y + c_1 = 0$$

esse sono parallele se : $r(A_r) = 1$, $r(A_c) = 2$ con :

$$A_r = \begin{bmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{bmatrix} , \quad A_c = \begin{bmatrix} a & b & c \\ a_1 & b_1 & c_1 \end{bmatrix}$$

CONDIZIONI DI PERPENDICOLARITA' TRA DUE RETTE

Date due rette in forma cartesiana :

$$r : ax + by + c = 0$$

$$s : a_1x + b_1y + c_1 = 0$$

esse sono *perpendicolari* se $-\frac{a}{b} = -\frac{b_1}{a_1}$ ossia allo stesso modo $r \perp s \Rightarrow aa_1 + bb_1 = 0$

Se le due rette sono date in forma canonica si avrà :

$$r : y = mx + q$$

$$s : y = m_1x + q_1$$

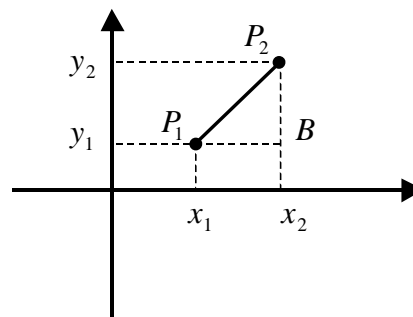
esse sono perpendicolari se

$$m = -\frac{1}{m_1}$$

DISTANZA TRA DUE PUNTI

Dati i punti $P_1(x_1; y_1)$, $P_2(x_2; y_2)$ la misura della distanza $\overline{P_1P_2}$ viene data da :

$$d(\overline{P_1P_2}) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$



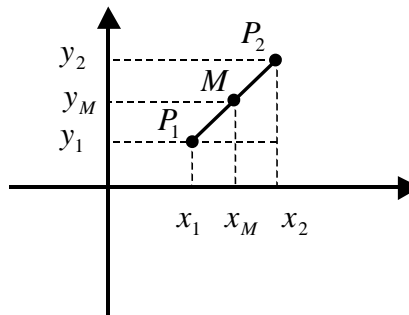
La formula ovviamente è frutto dell'applicazione del teorema di Pitagora al triangolo rettangolo P_1BP_2 . (allo stesso modo si può considerare il modulo del vettore $\overline{P_1P_2}$)

PUNTO MEDIO DI UN SEGMENTO

Dati i punti $P_1(x_1; y_1)$, $P_2(x_2; y_2)$

Le coordinate del punto medio M ,

sono date da : $M = \left(\frac{x_1 + x_2}{2} ; \frac{y_1 + y_2}{2} \right)$



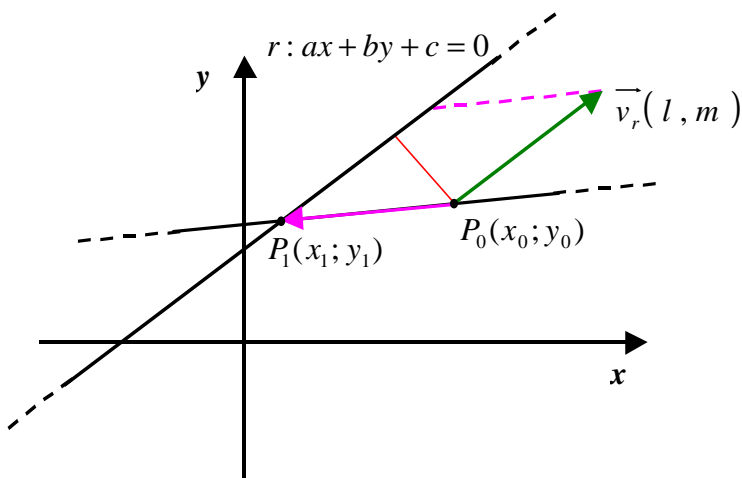
in effetti : $x_M = x_1 + x_M - x_1$ e poiché $x_M - x_1 = \frac{x_2 - x_1}{2}$ sostituendo :

$$x_M = x_1 + \frac{x_2 - x_1}{2} = \frac{2x_1 + x_2 - x_1}{2} = \frac{x_1 + x_2}{2} \quad ; \quad \text{e allo stesso modo} \quad y_M = \frac{y_1 + y_2}{2} .$$

DISTANZA DI UN PUNTO DA UNA RETTA

Dato un punto $P_0(x_0; y_0)$ ed una retta in forma cartesiana $r: ax + by + c = 0$, la distanza del punto P_0 dalla retta r è data da :

$$d(P_0 r) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$



Se consideriamo un punto $P_1 \in r$, il vettore $\overline{P_0P_1}$ e il vettore direttore di r formano un parallelogrammo di cui l'altezza relativa alla base (vettore direttore di r) rappresenta proprio la distanza tra il punto $P_0(x_0; y_0)$ e la retta data .

Ricordando quindi come si calcola l'area di un parallelogrammo costruito su due vettori (vedi vettori) si ha :

$$d(P_0r) = \frac{|m(x_1 - x_0) - l(y_1 - y_0)|}{\sqrt{l^2 + m^2}}$$

e poiché $l = b$, $m = -a$ parametri direttori della retta nel piano $z = 0$, la retta per $P_1(x_1; y_1)$ di equazione $ax_1 + by_1 + c = 0 \Rightarrow c = -ax_1 - by_1$ sostituendo :

$$d(P_0r) = \frac{|-a(x_1 - x_0) - b(y_1 - y_0)|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|ax_0 - ax_1 - by_1 + by_0|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

ESERCIZI SULLA RETTA

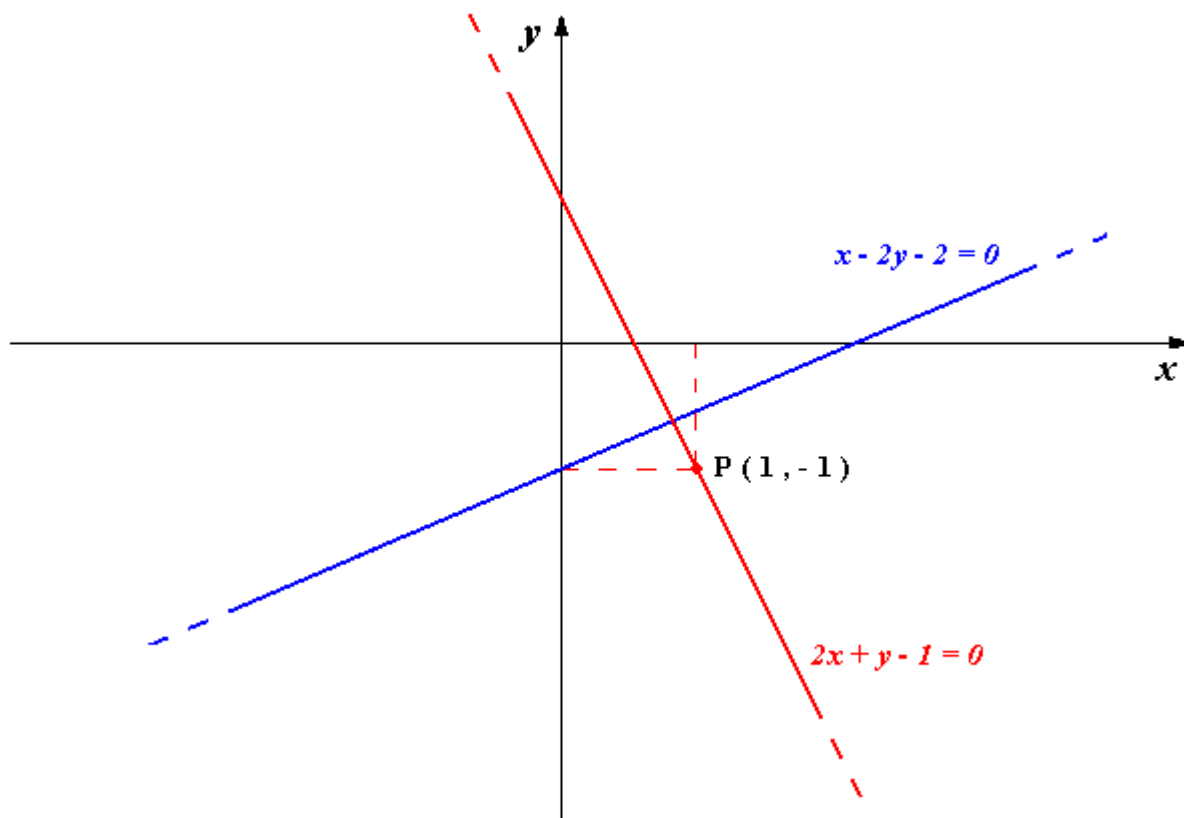
1. Determinare l'equazione della retta passante per il punto $P = (1, -1)$ e perpendicolare alla retta $x - 2y - 2 = 0$.

Dalla condizione di perpendicolarità tra due rette $aa'+bb'=0$ si ha che :

$$a'-2b'=0 \Rightarrow \text{e posto } b'=1 \Rightarrow a'=2$$

e dall'equazione del fascio di rette proprio : $a'(x-x_1)+b'(y-y_1)=0$ avremo che :

$$2(x-1)+(y+1)=0 \Rightarrow 2x+y-1=0$$



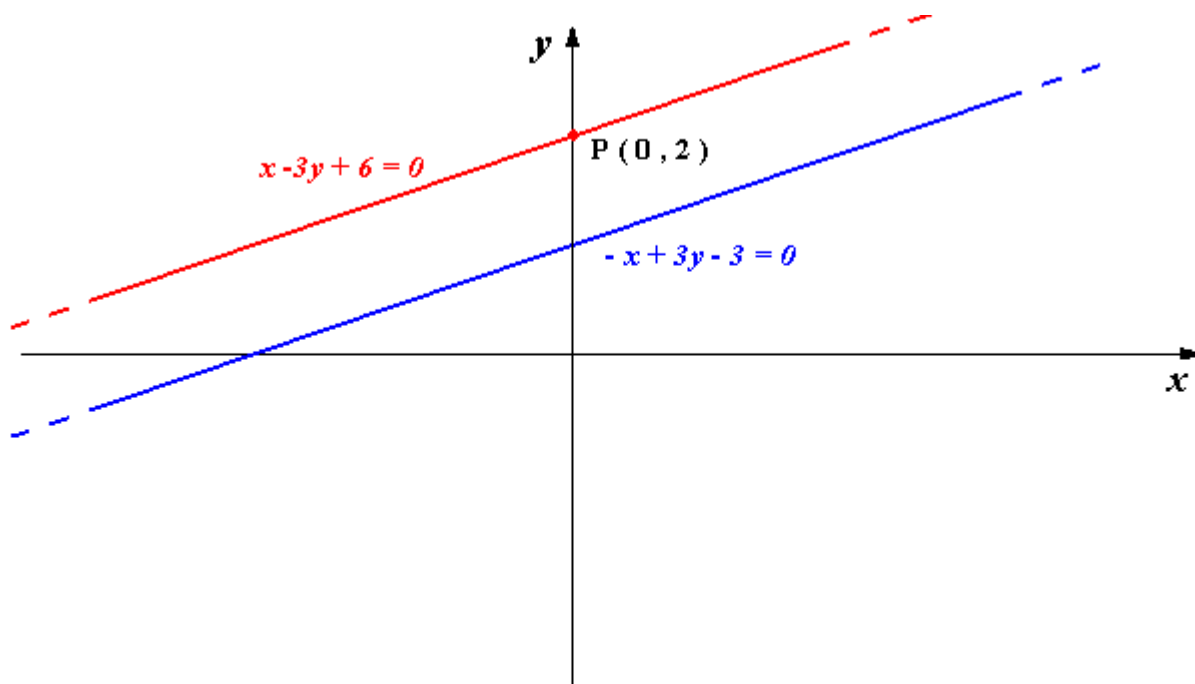
2. Determinare l'equazione della retta passante per il punto $P = (0, 2)$ e parallela alla retta $-x + 3y - 3 = 0$.

Dalla condizione di parallelismo tra due rette $ab' - a'b = 0$ si ha che :

$$-b' - 3a' = 0 \Rightarrow \text{e posto } a' = 1 \Rightarrow b' = -3$$

e dall'equazione del fascio di rette proprio : $a'(x - x_1) + b'(y - y_1) = 0$ avremo che :

$$(x - 0) - 3(y - 2) = 0 \Rightarrow x - 3y + 6 = 0$$



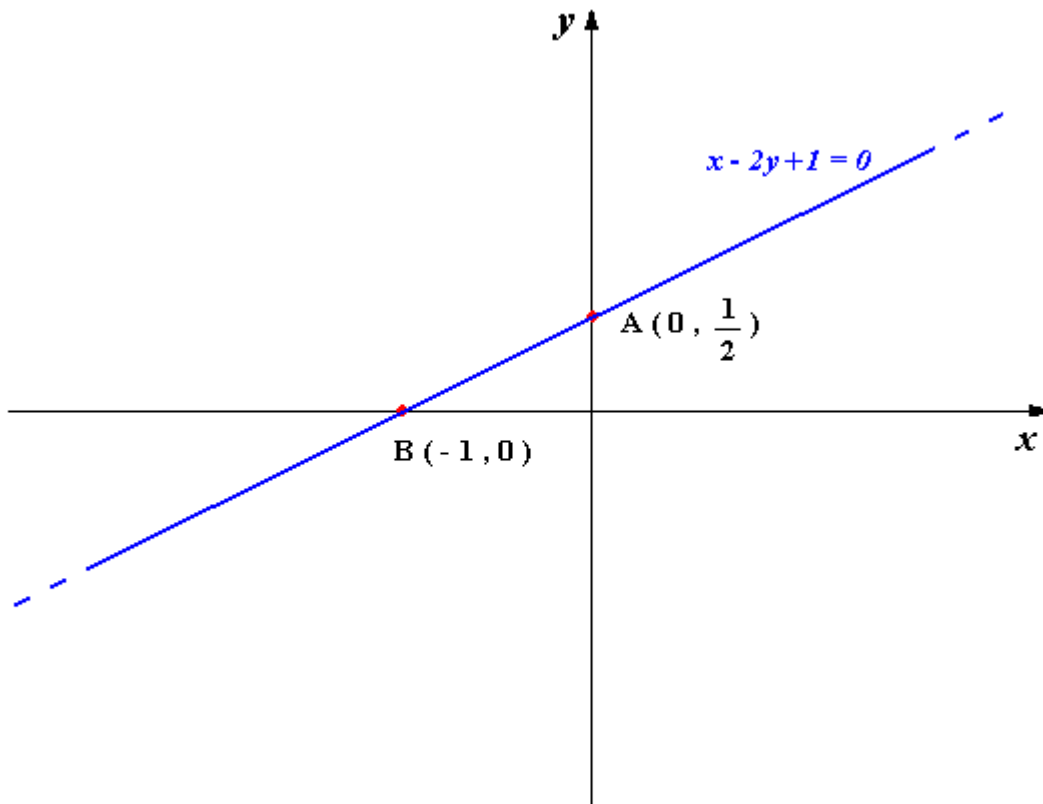
3. Determinare la distanza tra i punti che la retta di equazione $x - 2y + 1 = 0$ intercetta con gli assi cartesiani .

Risolviendo il sistema della retta con gli assi si ha :

$$\begin{cases} x - 2y + 1 = 0 \\ x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = \frac{1}{2} \\ x = 0 \end{cases} \quad A\left(0, \frac{1}{2}\right), \quad \begin{cases} x - 2y + 1 = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 0 \end{cases} \quad B(-1, 0)$$

utilizzando la formula della distanza tra due punti si ha $d(\overline{P_1 P_2}) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$:

$$d(\overline{AB}) = \sqrt{(-1 - 0)^2 + \left(0 - \frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{5}}{2}$$



4. Determinare le coordinate del punto medio del segmento AB, dove A è il punto di intersezione delle rette $x = 2$, $y - x = 0$ e B è il punto di intersezione delle rette $y = -1$, $-y - x = 0$.

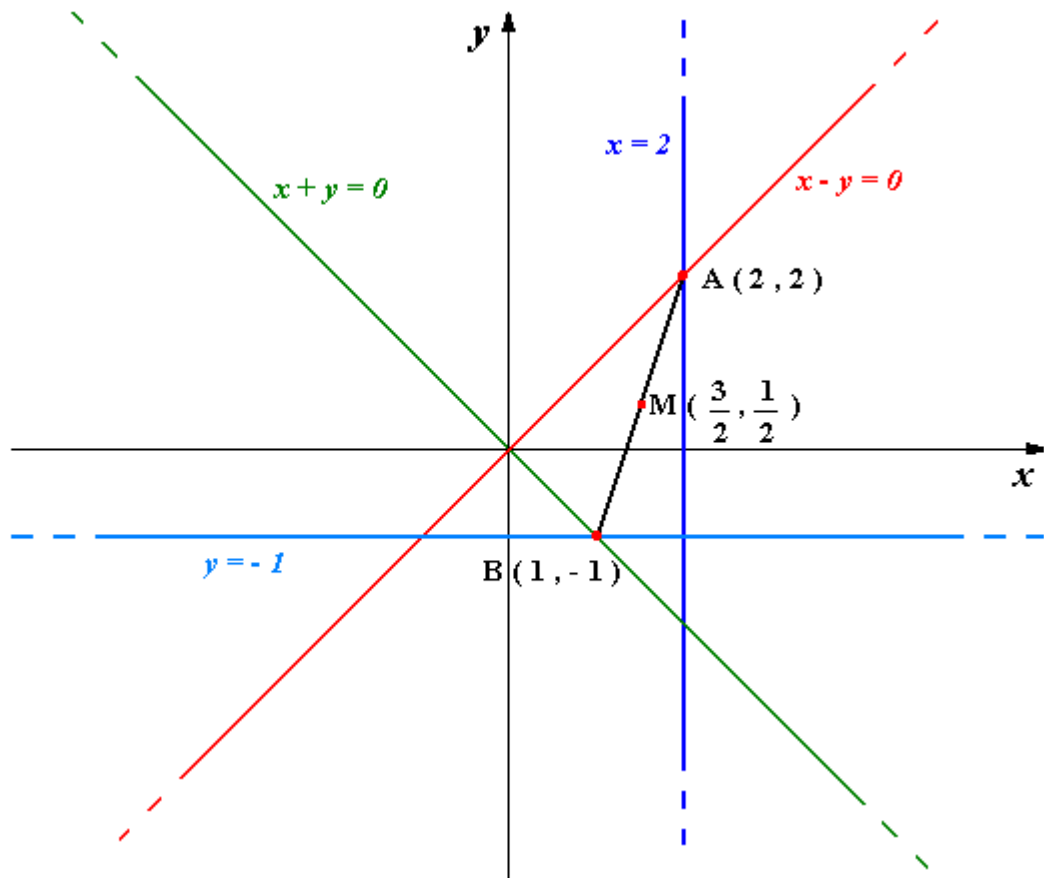
Le coordinate del punto A sono date da :

$$\begin{cases} x = 2 \\ y - x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 2 \end{cases} \Rightarrow A(2, 2)$$

e quelle di B :

$$\begin{cases} y = -1 \\ -y - x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = -1 \\ x = 1 \end{cases} \Rightarrow B(1, -1)$$

e per le coordinate del punto medio : $M\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right) \Rightarrow M\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)$.



5. Dopo aver verificato che le rette $r: 2x + y + 3 = 0$, $s: -2x - y - 1 = 0$ sono parallele , determinarne la distanza .

Ricordando che il coefficiente angolare di una retta è dato da : $m = -\frac{a}{b}$

Si ha che : $m_r = -2$, $m_s = -2$ che prova il parallelismo tra le due rette .

Dalla formula della distanza di un punto da una retta $d(P_0r) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$, determinando per esempio un punto della retta s : $P(0, -1)$ e considerando la retta $r: 2x + y + 3 = 0$ si ha :

$$d(P_0r) = \frac{|-1 + 3|}{\sqrt{2^2 + 1^2}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

