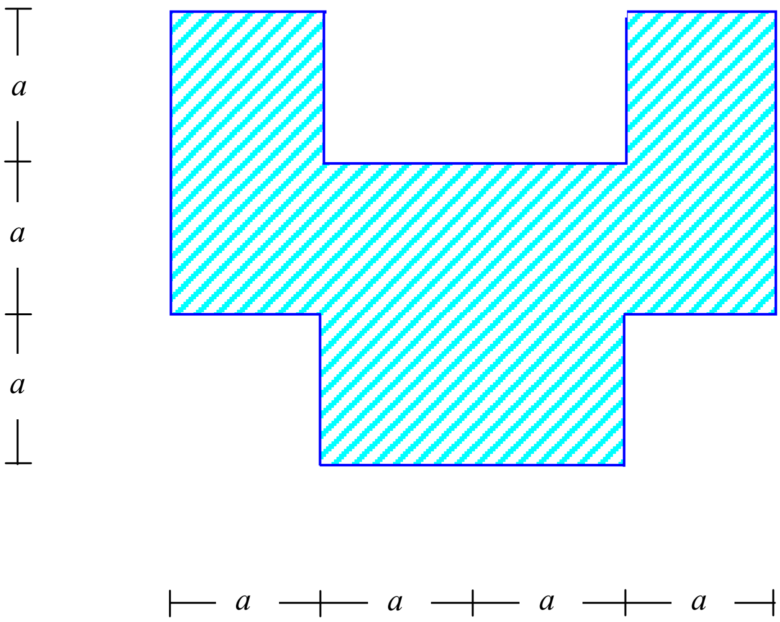
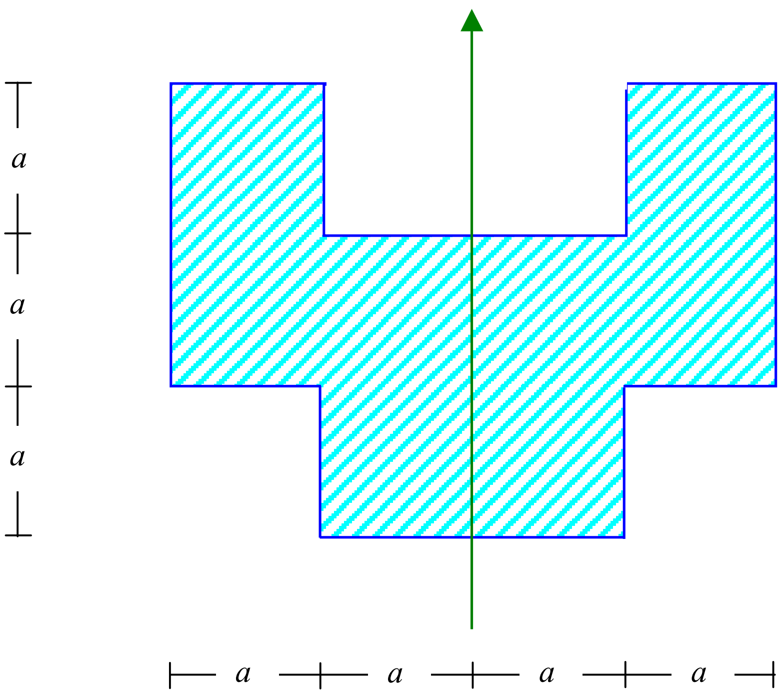
Determinare le coordinate dei vertici del nocciolo centrale d'inerzia



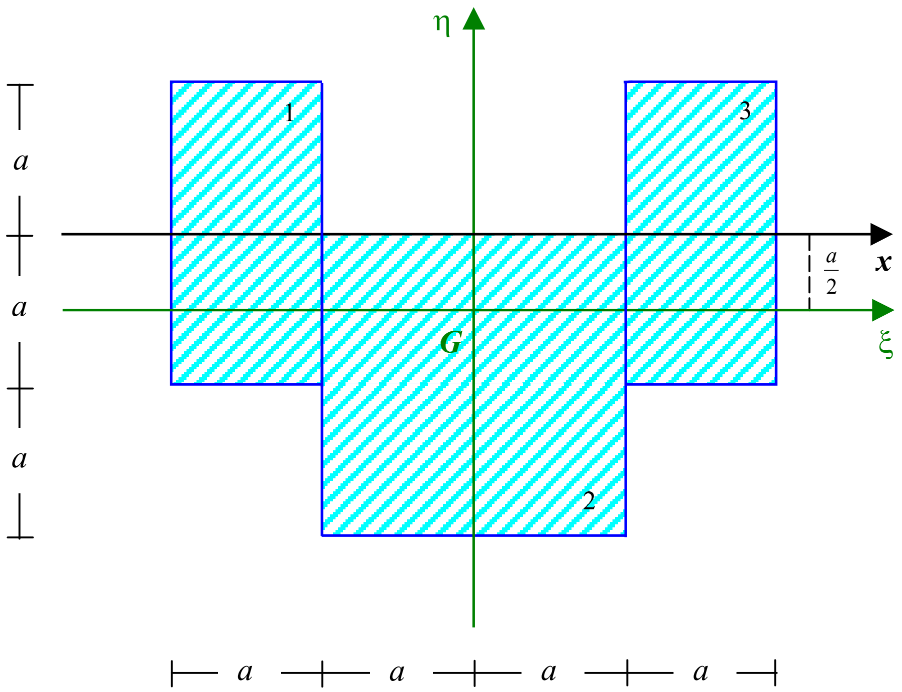
Svolgimento :

Si tratta di determinare i rispettivi antipoli delle rette inviluppanti (congiungenti due vertici) il sistema di masse .

Poichè il sistema possiede un **asse di simmetria** questo oltre ad essere asse baricentrico del sistema è anche **asse principale centrale d'inerzia** e quindi il baricentro ha coordinate $G(\,0\,,\,y_G\,)$.



$$y_G = \frac{S_x}{A} \qquad \Rightarrow \qquad y_G = \frac{S_{x1} + S_{x2} + S_{x3}}{A_1 + A_2 + A_3} = \frac{0 + 4a^2 \cdot (-a) + 0}{2a^2 + 4a^2 + 2a^2} = -\frac{1}{2}a$$



Calcolando i momenti d'inerzia si ha :

$$I_\xi = I_{\xi 1} + I_{\xi 2} + I_{\xi 3} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{a \cdot (2a)^3}{12} + 2a^2 \cdot \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \frac{(2a)^4}{12} + 4a^2 \cdot \left(-\frac{a}{2}\right)^2 + \frac{a \cdot (2a)^3}{12} + 2a^2 \cdot \left(\frac{a}{2}\right)^2$$

$$I_\xi = 2a^4 + \frac{8}{3}a^4 = \frac{14}{3}a^4$$

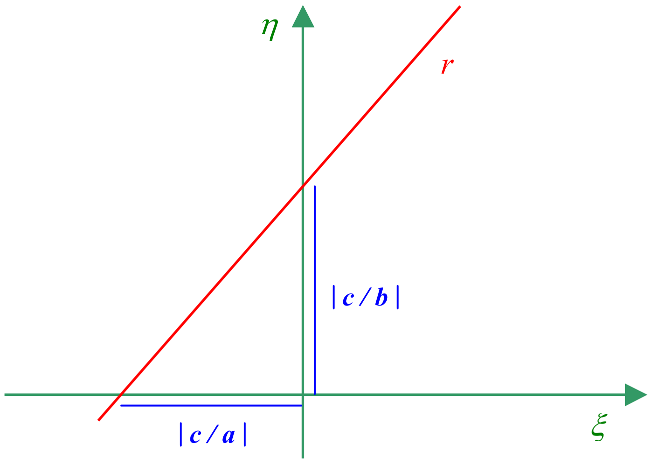
$$I_\eta = I_{\eta 1} + I_{\eta 2} + I_{\eta 3} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{a^3 \cdot 2a}{12} + 2a^2 \cdot \left(\frac{3}{2}a\right)^2 + \frac{(2a)^4}{12} + \frac{a^3 \cdot 2a}{12} + 2a^2 \cdot \left(\frac{3}{2}a\right)^2 = \frac{32}{3}a^4$$

I relativi raggi giratori d'inerzia :

$$\rho^2{}_\xi = \frac{I_\xi}{A} = \frac{14}{3}a^4 \cdot \frac{1}{8a^2} = \frac{7}{12}a^2$$

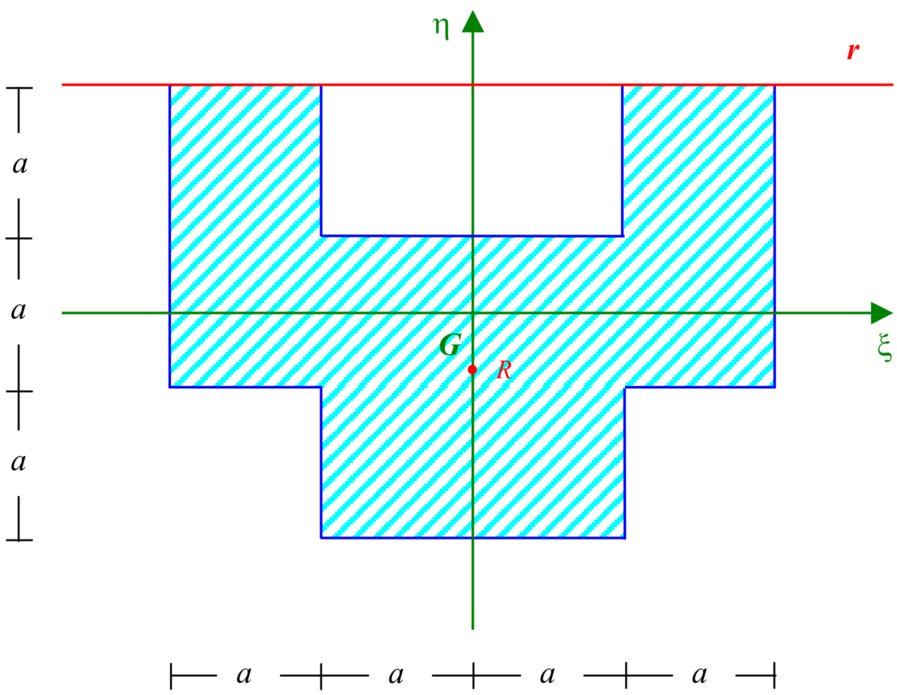
$$\rho^2{}_\eta = \frac{I_\eta}{A} = \frac{32}{3}a^4 \cdot \frac{1}{8a^2} = \frac{4}{3}a^2$$

Ricordando l'equazione della retta antipolare : $\boxed{\frac{a}{c}\xi + \frac{b}{c}\eta + 1 = 0}$



N.B. Si ricordi che i segmenti , intercettati dalla retta sugli assi del sistema principale , sono (nella equazione della retta antipolare) cambiati di segno insieme ai loro reciproci se individuati sul semiasse positivo .

e dalle relazioni che portano all'antipolo : $\boxed{\xi_R = \frac{a}{c}\cdot \rho^2{}_\eta \quad ; \quad \eta_R = \frac{b}{c}\cdot \rho^2{}_\xi}$



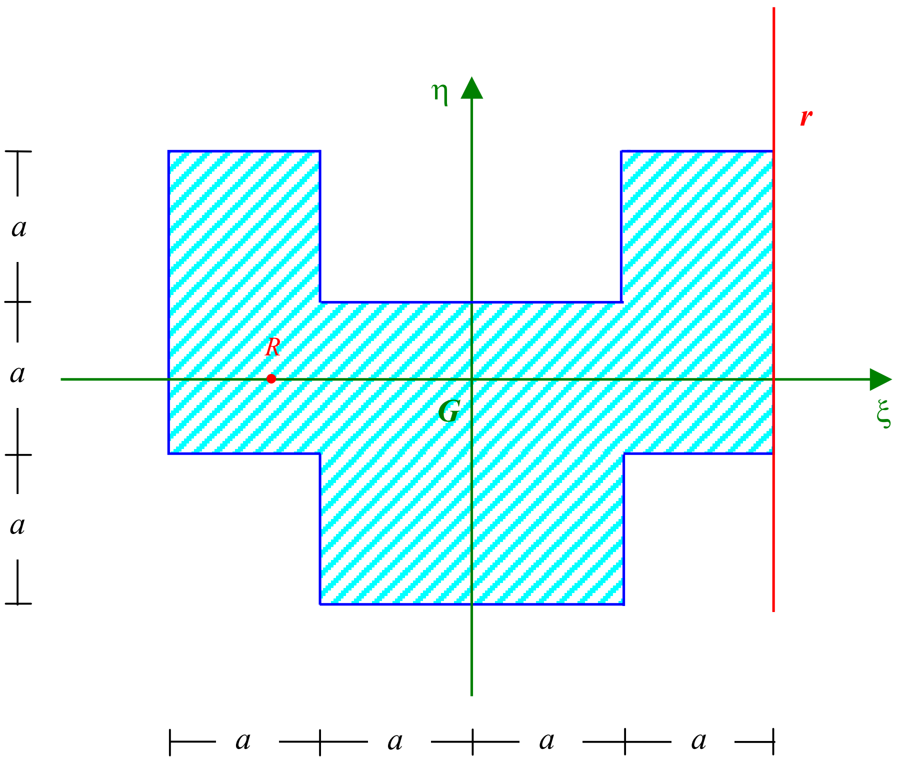
I segmenti intercettati dalla retta antipolare sugli assi principali $\xi\eta$ sono :

$$\frac{c}{a} = \nexists \quad \Rightarrow \quad \frac{a}{c} = 0 \qquad\qquad \xi_R = 0$$

da cui il relativo antipolo :

$$\frac{c}{b} = \frac{3}{2}a \quad \Rightarrow \quad \frac{b}{c} = -\frac{2}{3a} \qquad\qquad \eta_R = -\frac{2}{3a} \cdot \frac{7}{12}a^2 = -\frac{7}{18}a$$

di qui le coordinate del centro relativo (antipolo) della retta r : $R\left(0 , -\frac{7}{18}a \right)$



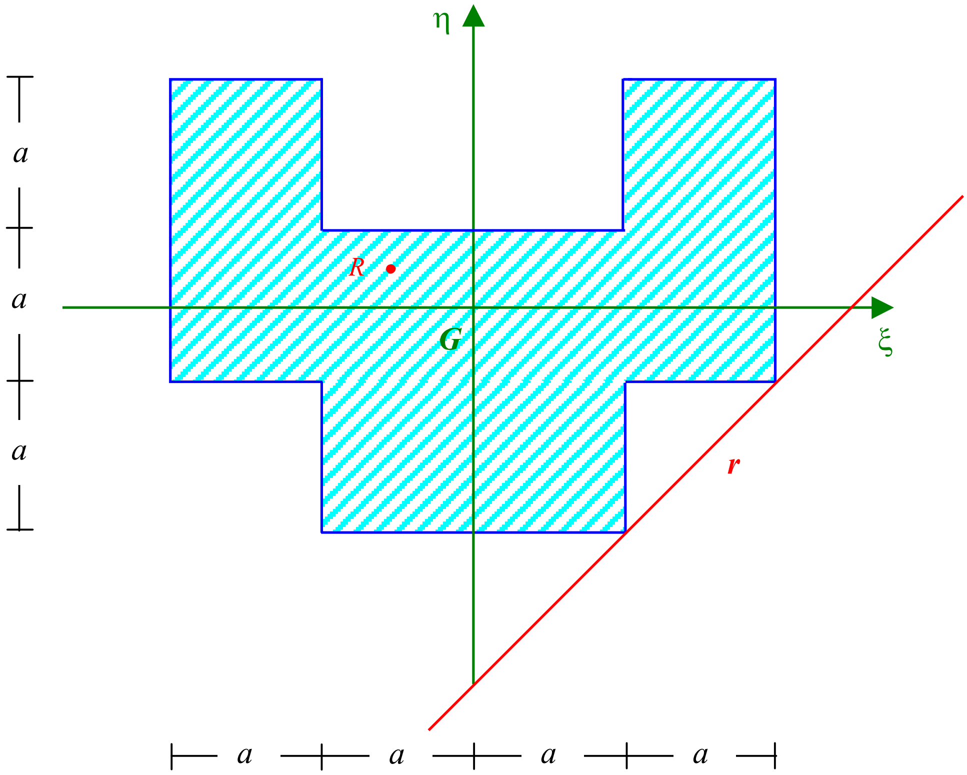
I segmenti intercettati dalla retta antipolare sugli assi principali $\xi\eta$ sono :

$$\frac{c}{a} = 2a \quad \Rightarrow \quad \frac{a}{c} = -\frac{1}{2a} \qquad\qquad \xi_R = -\frac{1}{2a} \cdot \frac{4}{3}a^2 = -\frac{4}{3}a$$

da cui il relativo antipolo :

$$\frac{c}{b} = \nexists \quad \Rightarrow \quad \frac{b}{c} = 0 \qquad\qquad \eta_R = 0$$

di qui le coordinate del centro relativo (antipolo) della retta r : $R\left(-\frac{4}{3}a , 0 \right)$



I segmenti intercettati dalla retta antipolare sugli assi principali $\xi\eta$ sono :

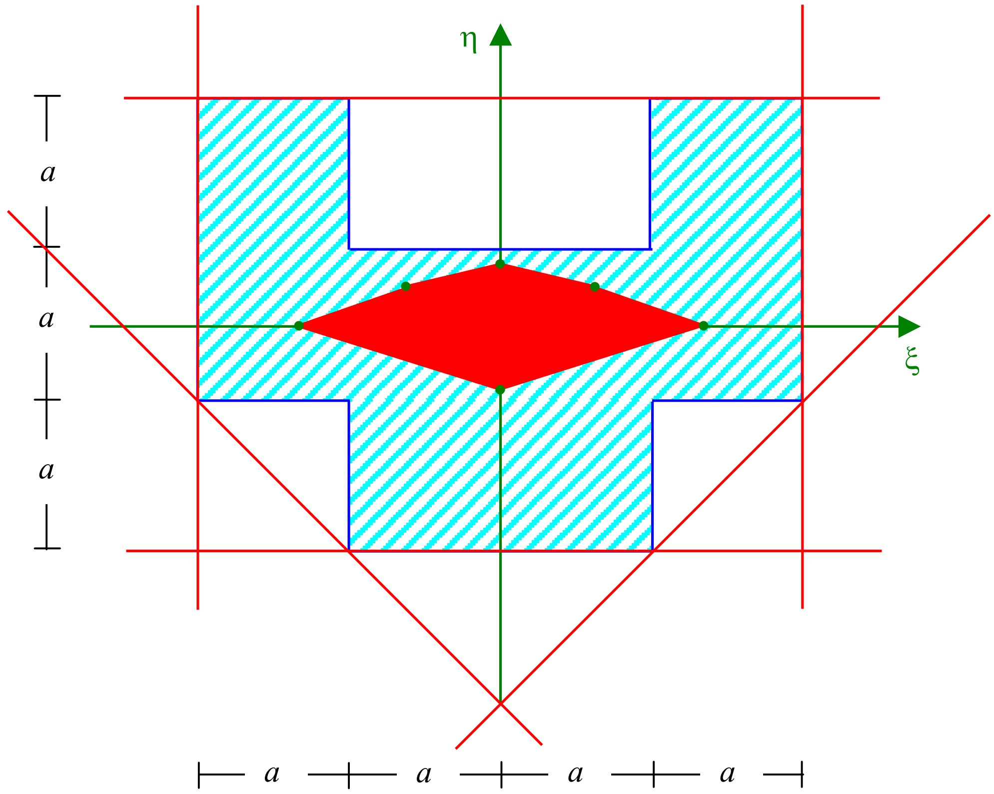
$$\frac{c}{a} = \frac{5}{2}a \quad \Rightarrow \quad \frac{a}{c} = -\frac{2}{5a} \qquad\qquad \xi_R = -\frac{2}{5a} \cdot \frac{4}{3}a^2 = -\frac{8}{15}a$$

da cui il relativo antipolo :

$$\frac{c}{b} = \frac{5}{2}a \quad \Rightarrow \quad \frac{b}{c} = \frac{2}{5a} \qquad\qquad \eta_R = \frac{2}{5a} \cdot \frac{7}{12}a^2 = \frac{7}{30}a$$

di qui le coordinate del centro relativo (antipolo) della retta r : $R\left(-\frac{8}{15}a \, , \frac{7}{30}a \right)$

Poiché le altre rette inviluppanti il sistema sono simmetriche , rispetto al baricentro , delle antipolari già determinate precedentemente , i rispettivi antipoli sono di conseguenza simmetrici di quelli già determinati .


η
ξ
a
a
a
a
a
a
a