

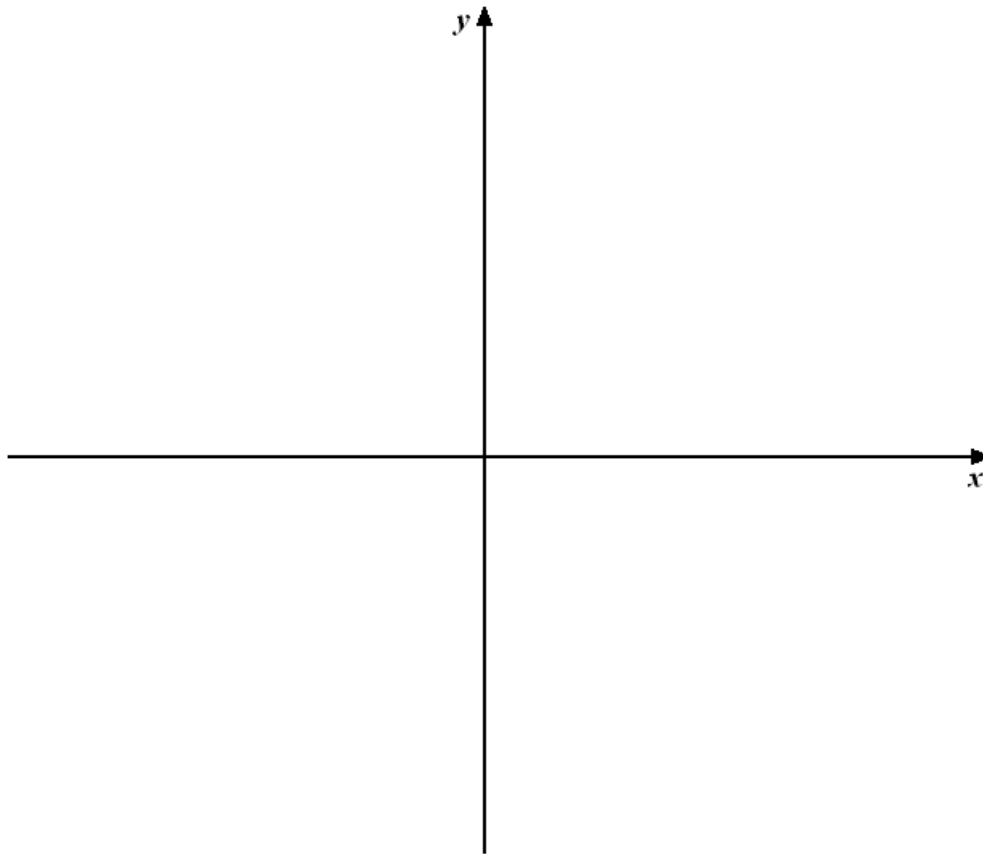
Studiare al variare del parametro reale a in \mathbb{R} la seguente funzione

$$f(x) = e^{\sqrt[3]{x} - (a-1)x}$$

e tracciarne i relativi grafici . (non è richiesto lo studio della f'')

1. Dominio

$$CfE. \Rightarrow \square \forall x \in \mathfrak{R}$$



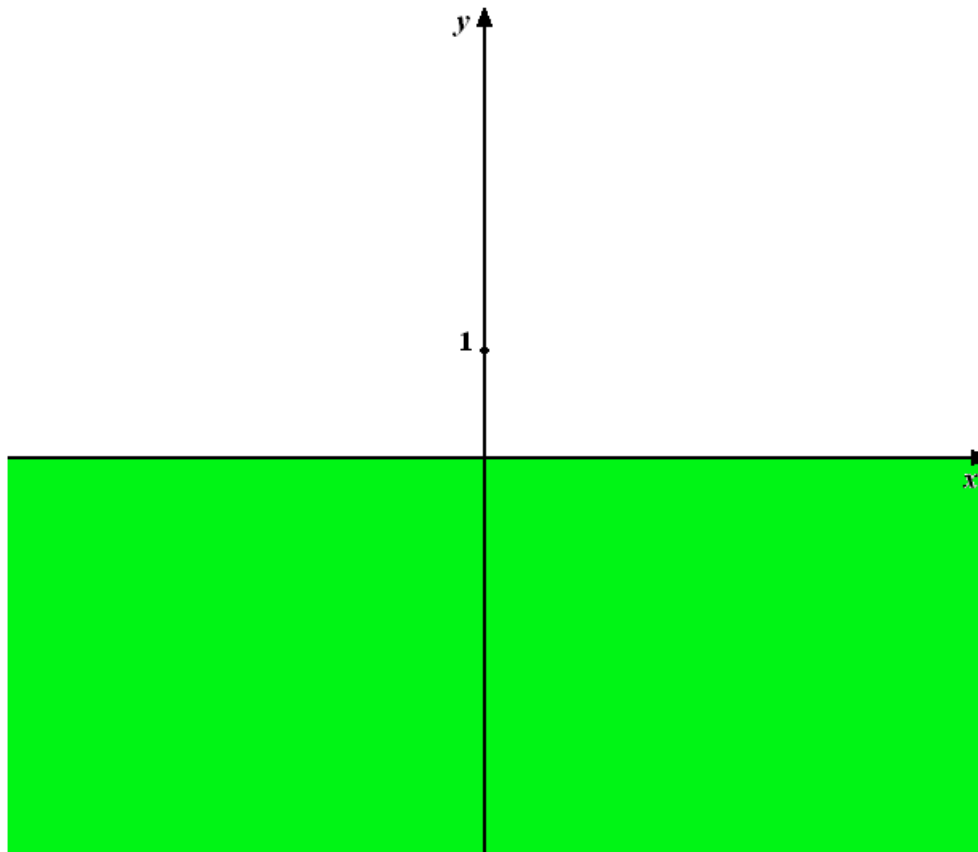
2. Intersezioni Assi

$$\begin{cases} y = e^{\sqrt[3]{x} - (a-1)x} \\ x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 1 \\ x = 0 \end{cases} \Rightarrow A(0, 1) \quad \underline{\text{punto d'intersezione con l'asse } y.}$$

$$\begin{cases} y = e^{\sqrt[3]{x} - (a-1)x} \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow \forall x \in \mathfrak{R} \quad \underline{\text{nessun punto d'intersezione con l'asse } y.}$$

3. Segno della Funzione

$$f(x) > 0 \Rightarrow \square \forall x \in \mathcal{R}$$



4. Limiti

Vedi lez. 2 Studio di Funzione

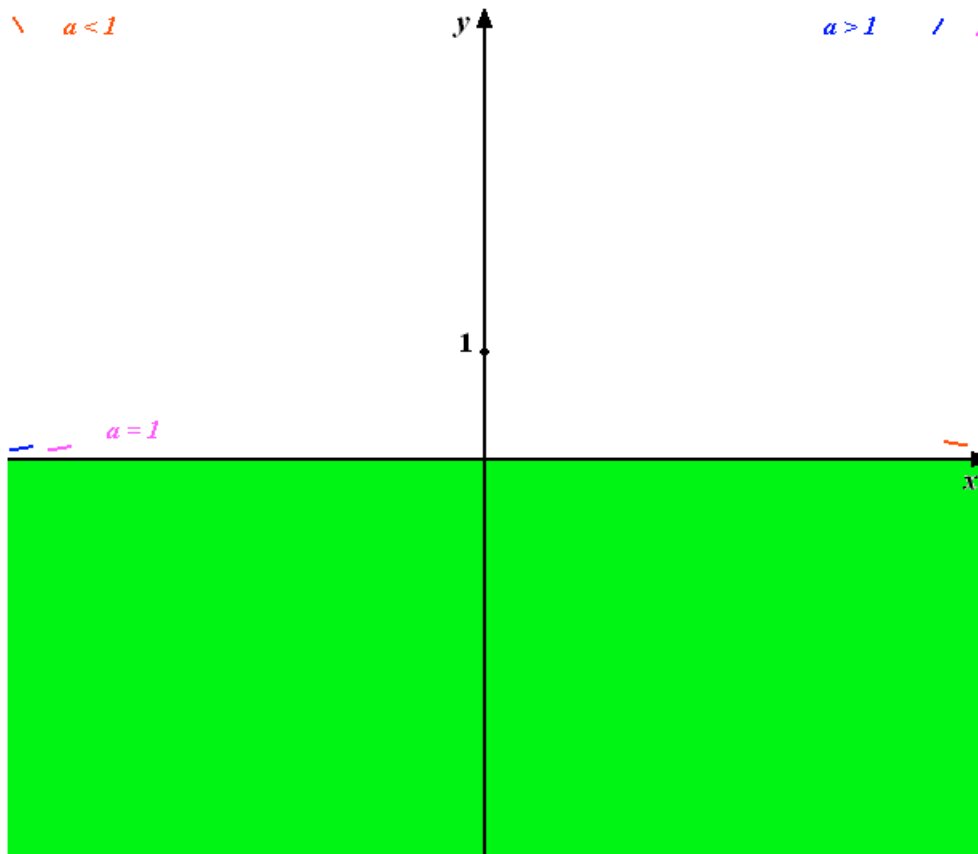
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{\sqrt[3]{x} - (a-1)x} = \begin{cases} \text{per } a-1 < 0 \Rightarrow a < 1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{\sqrt[3]{x} - (a-1)x} = 0 \\ \text{per } a-1 = 0 \Rightarrow a = 1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{\sqrt[3]{x} - (a-1)x} = 0 \\ \text{per } a-1 > 0 \Rightarrow a > 1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{\sqrt[3]{x} - (a-1)x} = +\infty \end{cases}$$

N.B. per $a > 1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{\sqrt[3]{x} - (a-1)x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{x \left(\sqrt[3]{\frac{1}{x^2}} - (a-1) \right)} = +\infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\sqrt[3]{x} - (a-1)x} = \begin{cases} \text{per } a-1 < 0 \Rightarrow a < 1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\sqrt[3]{x} - (a-1)x} = +\infty \\ \text{per } a-1 = 0 \Rightarrow a = 1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\sqrt[3]{x} - (a-1)x} = +\infty \\ \text{per } a-1 > 0 \Rightarrow a > 1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\sqrt[3]{x} - (a-1)x} = 0 \end{cases}$$

N.B. per $a > 1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\sqrt[3]{x} - (a-1)x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{x \left(\sqrt[3]{\frac{1}{x^2}} - (a-1) \right)} = 0$

La rappresentazione grafica dello studio dei limiti :



5. Asintoti

Verifica asintoto obliquo $y = mx + q$:

$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{\sqrt[3]{x} - (a-1)x}}{x} = 0, \infty$$

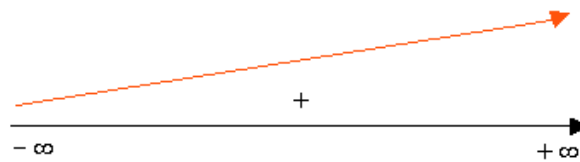
Quindi **non esistono asintoti obliqui**.

6. Derivata 1^

$$f'(x) = \left(\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} - (a-1) \right) e^{\sqrt[3]{x} - (a-1)x} = \left(\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} - (a-1) \right) e^{\sqrt[3]{x} - (a-1)x} = \left(\frac{1 - 3(a-1)\sqrt[3]{x^2}}{3\sqrt[3]{x^2}} \right) e^{\sqrt[3]{x} - (a-1)x}$$

$$f'(x) > 0 \Rightarrow 1 - 3(a-1)\sqrt[3]{x^2} > 0$$

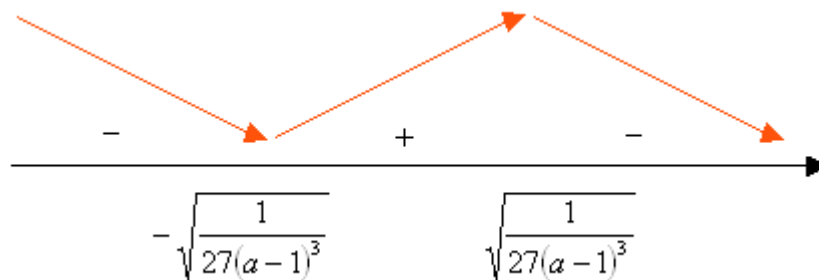
Per $\boxed{a \leq 1}$ $f'(x) > 0 \Rightarrow \forall x \in \mathfrak{R}$



Per $\boxed{a > 1}$ $f'(x) > 0 \Rightarrow 1 - 3(a-1)\sqrt[3]{x^2} > 0 \Rightarrow \sqrt[3]{x^2} < \frac{1}{3(a-1)}$

Vedi lez. 4 Algebra di Base

$$\rightarrow \sqrt[3]{x^2} < \frac{1}{3(a-1)} \Rightarrow x^2 < \frac{1}{27(a-1)^3} \Rightarrow -\sqrt{\frac{1}{27(a-1)^3}} < x < \sqrt{\frac{1}{27(a-1)^3}}$$



Il grafico :

