

Discutere la risolubilità del seguente sistema lineare al variare di $k \in \mathfrak{R}$ e determinarne le eventuali soluzioni.

$$\begin{cases} 2x - y - z = 1 \\ 6x - 4z = 3k \\ 6x - 2y = 3k \\ 4x - y - z = 3k - 1 \end{cases}$$

Risolviendo il sistema per sostituzione diretta si ha :

$$\begin{cases} 2x - y - z = 1 \\ 6x = 4z + 3k \\ 6x - 2y = 3k \\ 4x - y - z = 3k - 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x - y - z = 1 \\ 6x = 4z + 3k \\ 4z + 3k - 2y = 3k \\ 4x - y - z = 3k - 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x - y - z = 1 \\ 6x = 4z + 3k \\ y = 2z \\ 4x - y - z = 3k - 1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} 2x - 3z = 1 \\ 6x = 4z + 3k \\ y = 2z \\ 4x - 3z = 3k - 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3z = 2x - 1 \\ 6x = 4z + 3k \\ y = 2z \\ 4x - (2x - 1) = 3k - 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3z = 2x - 1 \\ 6x = 4z + 3k \\ y = 2z \\ x = \frac{3k - 2}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z = 0 \\ k = 1 \\ y = 0 \\ x = \frac{1}{2} \end{cases}$$

e quindi il sistema ammette una soluzione se e solo se $k = 1$; nessuna soluzione per $k \neq 1$.

Allo stesso modo risolvendo per via matriciale :

$$\begin{cases} 2x - y - z = 1 \\ 6x - 4z = 3k \\ 6x - 2y = 3k \\ 4x - y - z = 3k - 1 \end{cases} \Rightarrow \det A_c = \begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 & 1 \\ 6 & 0 & -4 & 3k \\ 6 & -2 & 0 & 3k \\ 4 & -1 & -1 & 3k - 1 \end{vmatrix} = 24(k - 1)$$

Se $\det A_c \neq 0 \Rightarrow k \neq 1 \Rightarrow r(A_c) = 4 \neq r(A_l) = 3$ per Rouchè-Capelli il sistema non ammette soluzioni .

Se $k = 1$ sostituendo nel sistema e risolvendo mediante sostituzione :

$$\begin{cases} 2x - y - z = 1 \\ 6x - 4z = 3 \\ 6x - 2y = 3 \\ 4x - y - z = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x - y - z = 1 \\ 6x - 4z = 3 \\ y = 2z \\ 4x - y - z = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x - 3z = 1 \\ 6x - 4z = 3 \\ y = 2z \\ 4x - 3z = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3z = 2x - 1 \\ 6x - 4z = 3 \\ y = 2z \\ 3z = 4x - 2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} 4x - 2 = 2x - 1 \\ 6x - 4z = 3 \\ y = 2z \\ 3z = 4x - 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$