Risolvere:

$y''' - y' = xe^x$

Dall'equazione caratteristica :

$$\lambda^3 - \lambda = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda\left(\lambda^2 - 1\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad \left| \begin{array}{l} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 1 \\ \lambda_3 = -1 \end{array} \right.$$

e quindi un integrale generale dell'equazione è dato da : $y(x) = c_1 + c_2 e^x + c_3 e^{-x} + \varphi(x)$

determiniamo ora l'integrale particolare $\varphi(x) = x(ax+b)e^x$

$$\varphi'(x) = (2ax+b)e^x + \left(ax^2+bx\right)e^x = \left(ax^2+2ax+bx+b\right)e^x$$
$$\varphi''(x) = (2ax+2a+b)e^x + \left(ax^2+2ax+bx+b\right)e^x = \left(ax^2+4ax+bx+2a+2b\right)e^x$$
$$\varphi'''(x) = (2ax+4a+b)e^x + \left(ax^2+4ax+bx+2a+2b\right)e^x = \left(ax^2+6ax+bx+6a+3b\right)e^x$$

sostituendo nell'equazione di partenza si ha :

$$\left(ax^2+6ax+bx+6a+3b\right)e^x - \left(ax^2+2ax+bx+b\right)e^x = xe^x$$
$$(4ax+6a+2b)e^x = xe^x$$

da cui : $\begin{cases} 4a = 1 \\ 6a + 2b = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} a = \dfrac{1}{4} \\ b = -\dfrac{3}{4} \end{cases}$

e infine si ha : $y(x) = c_1 + c_2 e^x + c_3 e^{-x} + \left(\dfrac{x^2}{4} - \dfrac{3}{4}x\right)e^x$