Risolvere:

$$y''+y=\frac{1}{e^x}+x^2$$

Dall'equazione caratteristica :

$$\lambda^2+1=0 \quad \Rightarrow \quad \left| \begin{array}{l} \lambda_1=-i \\ \lambda_2=+i \end{array} \right.$$

e quindi un integrale generale dell'equazione è dato da : $y(x)=c_1\cos x+c_2 \operatorname{sen} x+\varphi(x)$

determiniamo ora l'integrale particolare $\varphi(x)=a_1e^{-x}+\left(ax^2+bx+c\right)$

$$\varphi'(x)=-a_1e^{-x}+2ax+b$$
$$\varphi''(x)=a_1e^{-x}+2a$$

sostituendo nell'equazione di partenza si ha :

$$a_1e^{-x}+2a+a_1e^{-x}+\left(ax^2+bx+c\right)=e^{-x}+x^2$$
$$2a_1e^{-x}+ax^2+bx+2a+c=e^{-x}+x^2$$

da cui : $\begin{cases} 2a_1=1 \\ a=1 \\ b=0 \\ 2a+c=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1=\frac{1}{2} \\ a=1 \\ b=0 \\ c=-2 \end{cases}$

e infine si ha : $y(x)=c_1\cos x+c_2 \operatorname{sen} x+\dfrac{e^{-x}}{2}+x^2-2$