Date le rette *r* ed *r'* :

$$r:\begin{cases} x+az+1=0 \\ y-z-2=0 \end{cases} \quad , \quad r':\begin{cases} x-z+1=0 \\ y-3z+2=0 \end{cases}$$

a) determinare per quale valore di *a* le rette sono complanari e per tale valore dire se sono parallele , incidenti , coincidenti .

b) verificare che per $a=-\frac{2}{3}$ le rette sono sghembe e calcolarne la distanza.

a) Dal sistema formato dalle due rette :

$$\begin{cases} x+az=-1 \\ y-z=2 \\ x-z=-1 \\ y-3z=-2 \end{cases}$$

la complanarità è stabilita dalla condizione : $\det A_C = 0$

si ha quindi che :

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & a & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -3 & -2 \end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & -3 & -2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & a & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & -3 & -2 \end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad 2+4a+2=0$$

e quindi la complanarità è data per : $a=-1$.

Sostituendo tale valore nel sistema si ottiene :

$$\begin{cases} x-z=-1 \\ y-z=2 \\ x-z=-1 \\ y-3z=-2 \end{cases}$$

e risolvendo : $\begin{cases} x-z=-1 \\ y-z=2 \\ y-3z=-2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=z-1 \\ y=z+2 \\ z+2-3z=-2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=3 \\ y=4 \\ z=2 \end{cases}$

le rette sono quindi incidenti nel punto : $P=(\,3\,,4\,,2\,)$.

b) E' evidente che per $a \neq -1$ le rette (non essendo complanari) risultano sghembe .

Nel caso sia $a=-\frac{2}{3}$, calcoliamo la distanza tra le due rette .

Dal fascio di piani di asse la retta *r'* :

$$\alpha): \quad \lambda(x-z+1)+\mu(y-3z+2)=0 \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{v_\alpha}=(\,\lambda\,,\mu\,,-\lambda-3\mu\,)$$

determiniamo quello parallelo alla retta *r* :

$$r:\begin{cases} x=-1+\frac{2}{3}t \\ y=2+t \\ z=t \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{v_r}=\left(\,\frac{2}{3}\,,1\,,1\,\right)\,||\,r \quad , \quad P_r(\,-1\,,2\,,0\,)\in r$$

Imponendo quindi la condizione di parallelismo tra piano e retta si ha :

$$\alpha\,||\,r \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{v_\alpha}\perp\overrightarrow{v_r} \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{v_\alpha}\cdot\overrightarrow{v_r}=0 \quad \Rightarrow \quad \frac{2}{3}\lambda+\mu-\lambda-3\mu=0 \quad \Rightarrow \quad -\lambda-6\mu=0$$

posto $\mu=-1 \quad \Rightarrow \quad \lambda=6$ e di qui sostituendo nell'equazione del fascio si ha il piano $\alpha\,||\,r$:

$$\alpha): \quad 6x-y-3z+4=0$$

e infine dalla formula della distanza punto – piano , $d(P_r\alpha)=\frac{|\,ax_0+by_0+cz_0+d\,|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$, si ha :

$$d(P_r\alpha) = \frac{|-6-2+4|}{\sqrt{6^2+(-1)^2+(-3)^2}} = \frac{4}{\sqrt{46}} = \frac{2\sqrt{46}}{23}$$