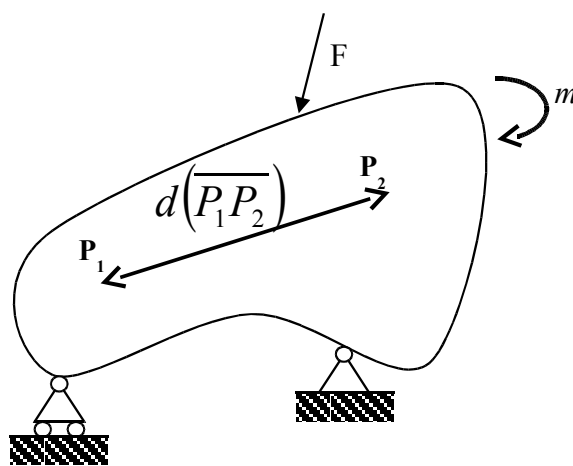


APPUNTI DI STATICA

La **statica** è la materia che si occupa dello **studio dell'equilibrio dei corpi**. Ci occuperemo, in particolare, solo dei “corpi rigidi”.¹

Un corpo si definisce **rigido** quando, rimane **invariata la distanza fra due qualunque suoi punti**, pur soggetto ad un sistema di azioni (forze e momenti). In sostanza, dati due punti $P_1(x_1, y_1)$ e $P_2(x_2, y_2)$ appartenenti al medesimo corpo si ha:



$$d(P_1P_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = k$$

Un sistema di azioni è un sistema insieme di forze o momenti ovvero di entità capaci di far compiere al corpo rigido rispettivamente una rotazione o una traslazione, ovvero uno “spostamento generalizzato”.

Si dicono **attive**, quelle forze o momenti che sono direttamente applicate al corpo; **reattive** quelle trasmesse dai vincoli. I vincoli si possono classificare sulla base del numero di spostamenti che impediscono e precisamente si diranno semplice doppi o tripli a seconda del numero di reazioni vincolari che forniscono per impedire i relativi spostamenti.

Ovviamente, poiché un corpo rigido ha nel piano 3 gradi di libertà (g.d.l) occorreranno tre parametri per definirne compiutamente la configurazione.

Per rappresentare le **azioni attive** (carichi) e **reattive** (reazioni vincolari) occorre richiamare elementi di analisi vettoriale che di seguito richiameremo brevemente.

¹In realtà il concetto di corpo rigido è da intendersi come approssimazione del modello reale di corpo che comunque è soggetto in natura a deformazione se pur anche infinitesima

Elementi di analisi vettoriale

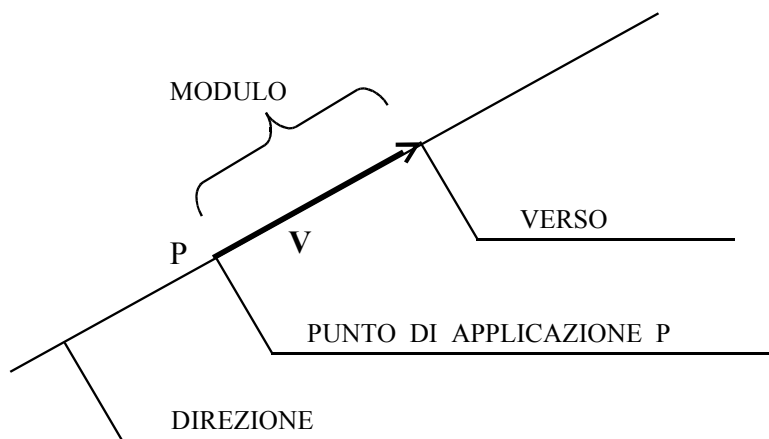
I vettori sono enti geometrici che servono per rappresentare grandezze fisiche.

Essi possono essere liberi o applicati, a seconda se hanno un punto di applicazione o meno.

Sono caratterizzati da:

<u>Modulo o lunghezza</u>	rappresenta la lunghezza o l'intensità del vettore
<u>Direzione</u>	è la retta su cui agisce il vettore
<u>Verso</u>	indica se la retta è percorsa in un senso o nell'altro
<u>Punto di applicazione P</u>	è il punto da dove si diparte il vettore

Esempio:



OPERAZIONI SUI VETTORI

Moltiplicazione di un vettore per uno scalare

Se indichiamo con k una quantità scalare, possiamo definire moltiplicazione dello scalare k per il vettore \mathbf{v} l'operazione che associa allo scalare ed al vettore un altro vettore \mathbf{w} il cui modulo vale $|k| \cdot |\mathbf{v}|$, la cui direzione è la stessa di \mathbf{v} , ed il verso è quello di \mathbf{v} oppure opposto a seconda che lo scalare sia positivo o negativo.

Versore di un vettore

Si definisce versore di un vettore:

$$\text{vers } u = \left(\frac{u}{|u|} \right)$$

pertanto $\text{vers } \mathbf{u}$ risulta avere modulo unitario, direzione e verso coincidenti con quelli di \mathbf{u} .

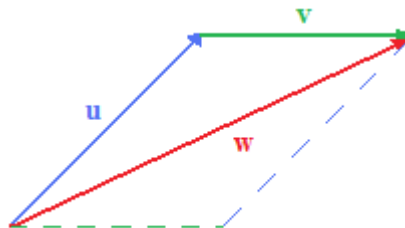
In particolare, il versore che giace sull'asse delle x si indica con la notazione \mathbf{i} , quello sull'asse delle y si indica con la notazione \mathbf{j} , quello sull'asse delle z si indica con la notazione \mathbf{k} .

Somma di vettori

Si definisce somma di due vettori \mathbf{u} e \mathbf{v} l'operazione che associa ai due vettori un terzo vettore \mathbf{w} :

$$\mathbf{w} = \mathbf{u} + \mathbf{v}$$

ottenuto tramite la regola del parallelogramma ovvero tramite il vettore che rappresenta la diagonale del parallelogramma avente per lati i due vettori da sommare disposti uno di seguito all'altro.



L'operazione, ovviamente, può essere estesa a più vettori.

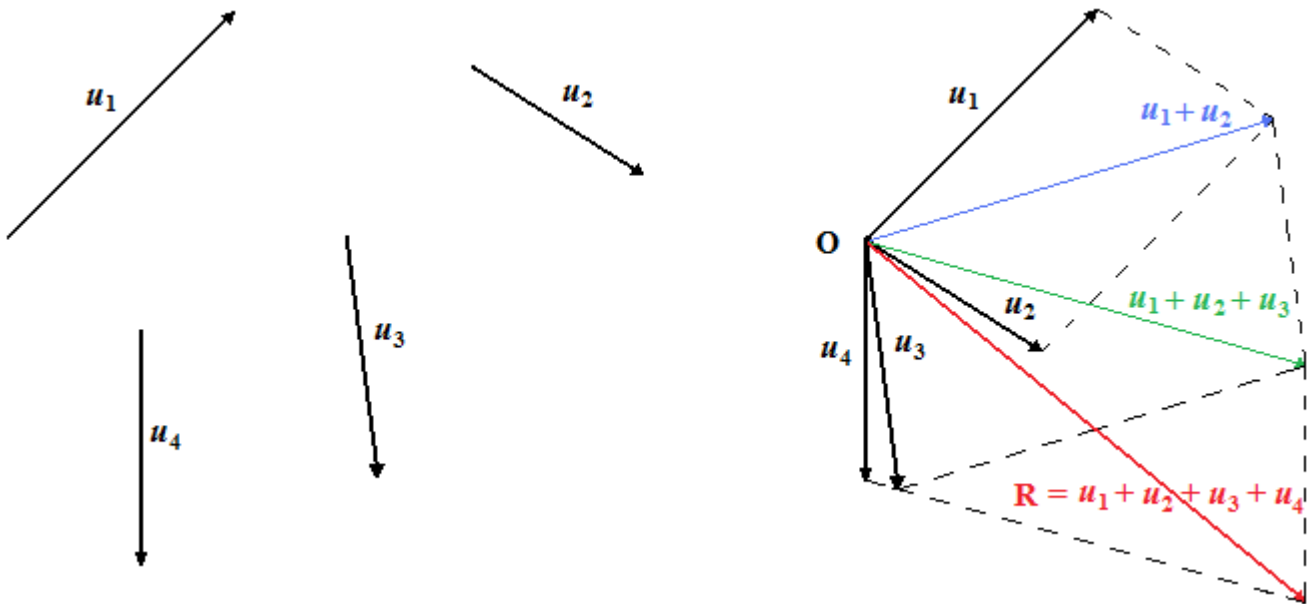
Dato un sistema di vettori $u_1, u_2, \dots, u_n \in R^n$ determiniamo il vettore somma utilizzando equivalentemente due metodi grafici

a) Metodo del parallelogramma

Tale metodo si basa sulla scelta arbitraria di un punto O di R^n , detto polo, dal quale si riportano ordinatamente in direzione, verso e modulo i vettori del sistema assegnato; si costruisce poi in successione il parallelogramma sui rispettivi vettori (procedendo di due in due)

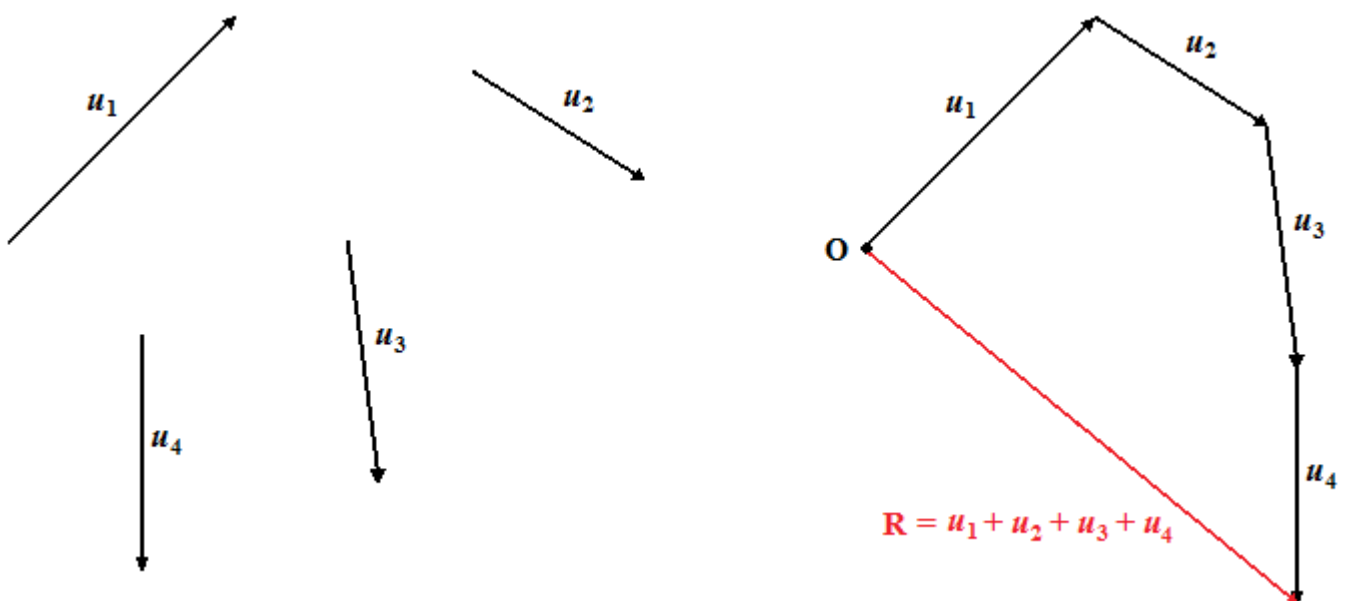
di cui la diagonale esprime il vettore somma parziale. L'ultima diagonale costruita sul parallelogramma finale della serie di vettori rappresenta il vettore somma chiamato **Risultante** del sistema di vettori.

Es: Dati $u_1, u_2, u_3, u_4 \in R^n$



b) Metodo del poligono

Tale metodo si basa sulla scelta arbitraria di un punto O di R^n , detto polo, dal quale si riportano consecutivamente (l'uno all'altro) e ordinatamente in direzione, verso e modulo i vettori del sistema assegnato. Il vettore che chiude il poligono così costruito rappresenta il vettore somma chiamato **Risultante** del sistema di vettori.



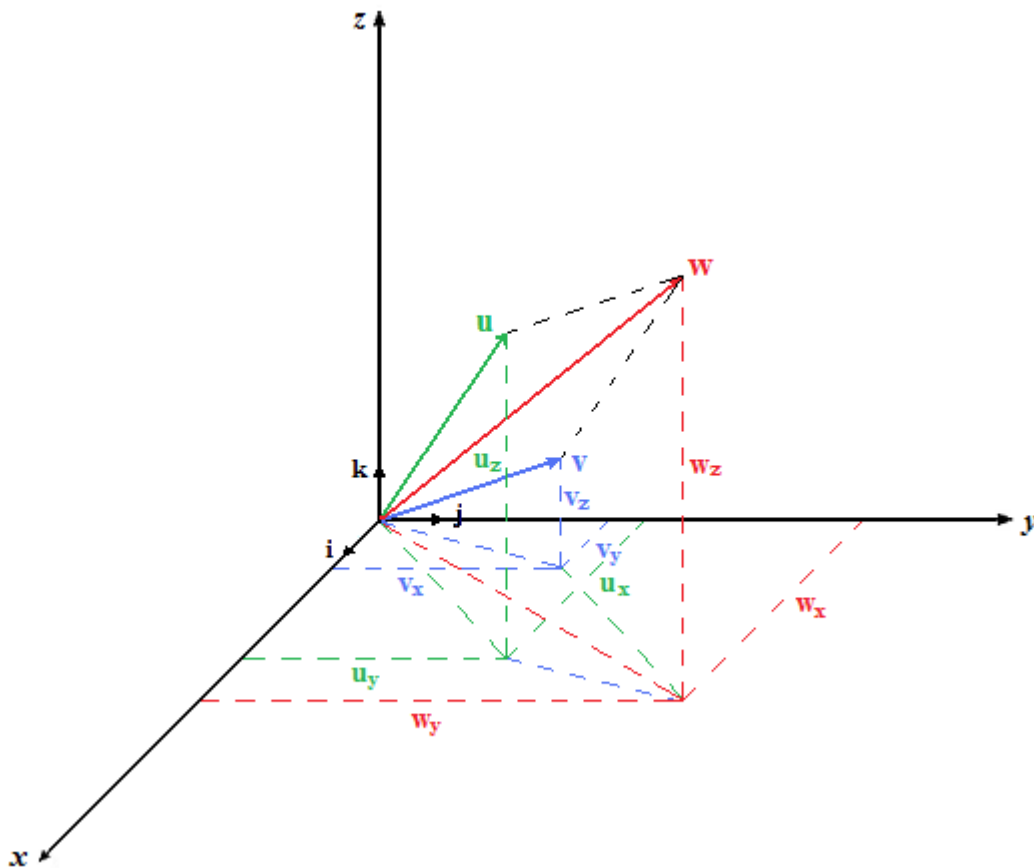
In termini di componenti ed in un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $Oxyz$, siano \mathbf{u} e \mathbf{v}

due vettori : $u = u_x \bar{i} + u_y \bar{j} + u_z \bar{k}$ e $v = v_x \bar{i} + v_y \bar{j} + v_z \bar{k}$

si ha:

$$w = u + v = (u_x + v_x) \bar{i} + (u_y + v_y) \bar{j} + (u_z + v_z) \bar{k}$$

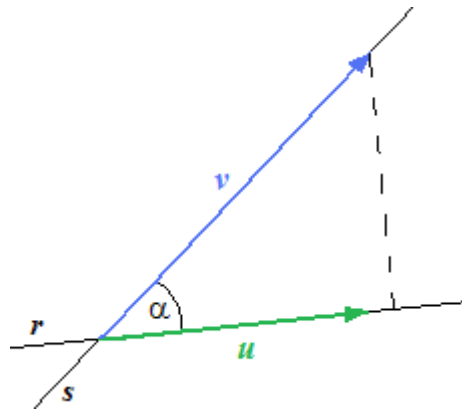
Esempio:



Prodotto scalare fra due vettori

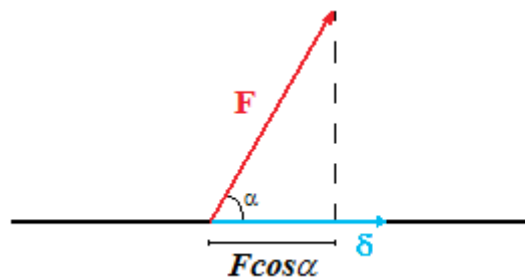
Definiamo prodotto scalare fra due vettori \mathbf{u} e \mathbf{v} (e si indica $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$), l'operazione che associa ai due vettori il numero reale $|\mathbf{u}||\mathbf{v}|\cos\alpha$ (dove α è l'angolo compreso tra \mathbf{u} e \mathbf{v}).

Se \mathbf{u} è un versore allora \mathbf{u}_x è la componente di \mathbf{u} sulla direzione \mathbf{u} .



Tipico esempio è la definizione di Lavoro; infatti esso si definisce come il seguente prodotto scalare:

$$L = \mathbf{F} \cdot \boldsymbol{\delta} \cos \alpha$$

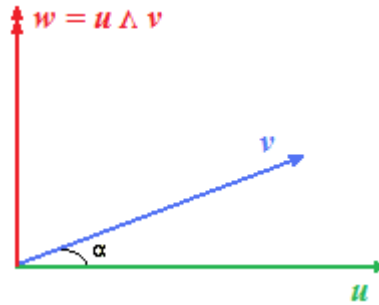


dove \mathbf{F} è la forza che compie il lavoro, $\boldsymbol{\delta}$ è lo spostamento compiuto ed α è l'angolo compreso tra le due direzioni.

Prodotto vettoriale fra due vettori

Definiamo prodotto vettoriale fra due vettori \mathbf{u} e \mathbf{v} (e si indica con $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}$) l'operazione che associa ai due vettori un terzo vettore \mathbf{w} così definito:

$$\mathbf{u} \wedge \mathbf{v} = |\mathbf{u}| \cdot |\mathbf{v}| \sin \alpha$$



Esempio di un prodotto vettoriale è la definizione di momento di un vettore rispetto ad un polo.

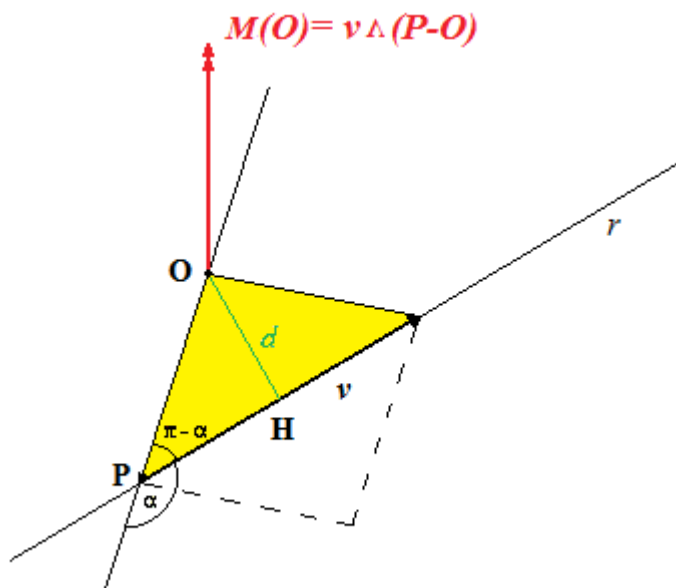
Momento di un vettore rispetto ad un polo

Consideriamo un vettore \mathbf{v} applicato in P, ossia(P, \mathbf{v}), ed un polo O di una regione.

Definiamo il vettore applicato (P-O), vettore posizione di P rispetto ad O.

Si definisce **vettore momento** di (P; \mathbf{v}) rispetto ad O, il vettore $M(O)$ che risulta da:

$M(O) = (\mathbf{P}-\mathbf{O}) \wedge \mathbf{v}$



Si dice anche momento di \mathbf{v} rispetto ad O .

Dalla definizione di prodotto vettoriale : $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v} = |\mathbf{u}| \cdot |\mathbf{v}| \sin \alpha$, dove α è l'angolo compreso tra le due direzioni,

il modulo del vettore momento è dato da :

$$M(O) = (P - O) \wedge \mathbf{v} \rightarrow |M(O)| = |P - O| \cdot |\mathbf{v}| \sin \alpha$$

ed esprime geometricamente il doppio dell'area del triangolo evidenziato.

ora poiché : $\sin(\pi - \alpha) = \sin \alpha$

sostituendo si trova :

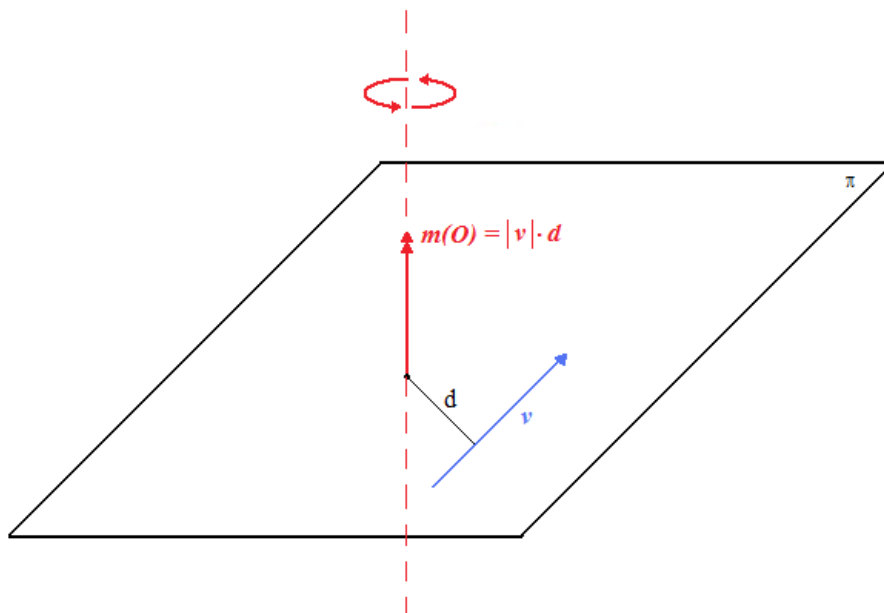
$$|M(O)| = |P - O| \cdot |\mathbf{v}| \sin(\pi - \alpha)$$

e infine , dalla relazione trigonometrica : $d = |P - O| \sin(\pi - \alpha)$

si arriva a :

$$|M(O)| = |\mathbf{v}| \cdot d$$

con d distanza dal polo O alla retta d'azione di \mathbf{v} .



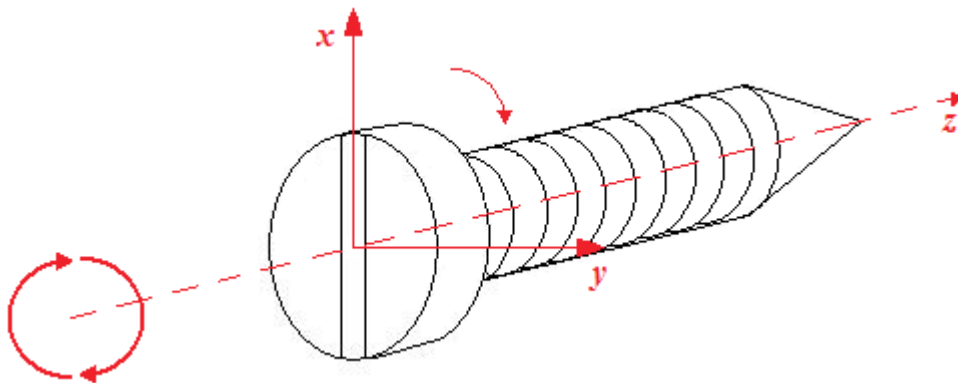
Il verso del vettore momento è dato dalla regola della mano destra. Il verso è stabilito da quello indicato dal dito medio della mano destra quando si dispongano, in maniera concorde ai due vettori di cui eseguire il prodotto vettoriale, rispettivamente il pollice e l'indice della stessa mano.

Possiamo, alternativamente, affermare che il verso viene stabilito dalla rotazione dell'angolo minore, formato dai due vettori uscenti dal vertice comune, di cui deve ruotare il primo vettore per sovrapporsi al secondo seguendo l'ordine dettato dal prodotto vettoriale.

Nei casi di sistemi piani, il verso può essere entrante od uscente dal piano, pertanto, in modo più conveniente, si differenzieranno il verso definendo orario od antiorario a seconda del senso cui tende a far ruotare il corpo.

Qualora il vettore v sia una forza F si parlerà in tal caso di momento di una forza. Dal punto di vista del significato statico, il momento di una forza può essere visto come una entità che tende a far ruotare un oggetto, intorno all'asse passante per il polo ed ortogonale al piano definito dai due vettori, quando ad esso vi sia applicato.

Es: $x \wedge y = z$



CARICHI CONCENTRATI E DISTRIBUITI

Le azioni in generale sono **attive** e si possono anche semplicemente definire **carichi** quando sono direttamente applicate. Mentre se sono prestazioni statiche di determinati dispositivi detti vincoli (e che verranno meglio descritti in seguito) vengono chiamate semplicemente **reazioni**.

I carichi possono essere schematizzati come **forze** o **coppie** concentrate in un punto, oppure come **forze distribuite** su di una lunghezza. Le unità di misura per forze, momenti e forze distribuite (tutte grandezze derivate), sono rispettivamente N o Kg, Nm o Kgm e N/m o Kg/m (Ricordiamo che $1\text{N} = 1\text{Kg}\cdot\text{m}/\text{sec}^2$)

FORZE E MOMENTI

Si definisce forza generalizzata, qualunque causa atta a produrre una variazione dello stato di quiete o di moto di un corpo. In particolare si parlerà semplicemente di forza o di momento rispettivamente se la variazione dello stato di quiete è dovuta ad una traslazione ovvero ad un momento.

La forza può essere anche definita come vettore retta o vettore assiale, nel senso che appartiene ad una retta ben definita detta retta di azione. Più forze costituiscono un sistema di forze.

Si definisce **Risultante** di un sistema piano di forze, quella forza che, agendo sullo stesso corpo rigido, produce lo stesso effetto delle forze date.

Simbolicamente si scrive:

$$\mathbf{R} = \sum \mathbf{F}_i$$

Si definisce **Momento Risultante**, rispetto ad un punto (polo) O di un sistema piano di forze, la somma vettoriale dei momenti rispetto ad O di ogni singola forza.

Due sistemi di forze S_1 e S_2 si dicono **equivalenti** quando producono lo stesso effetto su qualsiasi corpo cui sono applicati. Dal punto di vista statico si possono anche definire **equivalenti** se hanno la stessa risultante ($R_1=R_2$) e lo stesso momento risultante $\mathbf{M}_1(O)=\mathbf{M}_2(O)$ rispetto a qualsiasi polo (come verrà successivamente dimostrato).

Un sistema di forze si dice **equilibrato** o **nullo** quando, le forze generalizzate applicate sul corpo producono effetto nullo. Dal punto di vista statico un sistema equilibrato può dirsi equilibrato o nullo, sistema di forze in equilibrio oppure sistema equivalente a zero.

Le condizioni affinché un sistema di forze sia equivalente a zero sono due, e cioè:

- a) un sistema costituito da due sole forze (non nulle) è equivalente a zero se e solo se tali forze sono direttamente opposte e avente stessa intensità, $F_1 = F_2$
- b) condizione necessaria affinché un sistema costituito da tre sole forze sia equivalente a zero e che le rette di azione di tali forze siano complanari e correnti in uno stesso punto proprio o improprio.

Un sistema si dice **equilibrante** di un sistema dato quando la somma dei loro risultanti e dei loro momenti risultanti calcolati rispetto ad un polo qualsiasi è uguale a zero, cioè:

$$\mathbf{R}_1 + \mathbf{R}_2 = \mathbf{O}$$

$$\mathbf{M}_1(\mathbf{O}) + \mathbf{M}_2(\mathbf{O}) = \mathbf{O}$$

Concludendo si ricordano due postulati validi per qualsiasi corpo:

- 1) non si altera l'equilibrio di un corpo se si sostituisce a più forze applicate in un punto la loro risultante applicata nel medesimo punto, oppure non si altera l'equilibrio di un corpo se si sostituisce ad una forza applicata in un punto più forze applicate nel medesimo punto e aventi come risultante la forza data.
- 2) non si altera l'equilibrio di un corpo rigido se si trasporta il punto di applicazione di una forza lungo la propria retta di azione (valido solo per i corpi rigidi).

I VINCOLI

Si definisce **Grado di Libertà** di un corpo il numero di parametri per definirne la sua configurazione.

Nel piano i gradi di libertà (g.d.l.) di un corpo rigido sono tre: due componenti di traslazione ed una rotazione.

Ovviamente, se un corpo rigido non è soggetto a nessuna forza esso è in equilibrio.

Se, invece, applichiamo un sistema di forze, non in equilibrio tra loro, il corpo passerà da una configurazione iniziale C_0 ad una finale C_1 .

L'applicazione dei vincoli impedisce questa trasformazione rispondendo alle forze applicate (carichi) con un sistema di forze equilibrante dette reazioni.

I vincoli che si prendono in considerazione nel presente corso sono:

- a) olonomi: introducono delle relazioni solo tra le coordinate dei punti vincolati (vincolo di posizione)
- b) fissi: ovvero indipendenti dal tempo e non cedevoli
- c) bilaterali: consentono solo spostamenti virtuali (infinitesimi e compatibili con i vincoli) irreversibili, ovvero ogni componente di movimento impedito lo è in entrambi i sensi
- d) privi di attrito o lisci: capaci di consentire integralmente i movimenti a cui non si oppongono
- e) perfetti: ossia non cedevoli

I vincoli si dicono poi:

esterni: se vincolano punti del corpo rigido al suolo

interni: se limitano o impediscono i movimenti relativi dei corpi rigidi cui sono collegati

Per dare un valore numerico ai vincoli ed operando una distinzione tra esterni ed interni si può definire il grado di vincolo come

vincoli semplici $v_e = 1$

$v_i = 1 (m-1)$ $m =$ numero aste; 1 = grado di vincolo

vincoli doppi $v_e = 2$

$v_i = 2 (m-1)$ $m =$ numero aste; 2 = grado di vincolo

vincolo triplo $v_e = 3$